

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
Институт математики

П. П. Матус, Ле Минь Хиеу

ТЕОРИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Минск
«Беларуская навука»
2026

Оглавление

Предисловие	13
Основные обозначения	17
Введение	19
1. Предварительные сведения	44
1.1. Сетки и сеточные функции	44
1.2. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов	47
1.3. Консервативная и компактная разностные схемы	51
1.3.1. Консервативная схема	51
1.3.2. Компактная схема	52
1.4. Формулы разностного дифференцирования произведения и суммирования по частям. Разностные формулы Грина	53
1.5. Теоремы вложения	55
1.6. Неравенство Гронуолла	55
1.7. Лемма Бихари	56
1.8. Операторно-разностные схемы	57
1.9. Метод прогонки	59
2. Основные понятия теории разностных схем	62
2.1. Погрешность аппроксимации	62
2.2. Устойчивость	63
2.3. Коэффициентная и сильная устойчивость	64
2.4. Сходимость	65
2.5. Теорема Лакса об эквивалентности	66
2.6. Критерий Лакса для нелинейных разностных схем	67
2.7. Принцип максимума	68
2.7.1. Одномерный случай	68
2.7.2. Многомерный случай	70
2.8. Двусторонние оценки	72
2.9. Монотонные разностные схемы для линейных уравнений	73

2.10. Слабая монотонность	73
2.11. Монотонность для нелинейных разностных схем	74
2.12. Неограниченная нелинейность	74
3. Нестационарные задачи	76
3.1. Постановка дифференциально-разностной задачи	76
3.2. Схемы с весами	78
3.3. Консервативная шахматная схема.....	80
3.4. Явно-неявные схемы для задач с обобщенными решениями.....	82
3.5. Монотонные разностные схемы на неравномерных сетках	87
3.5.1. Постановка задачи и разностная схема	87
3.5.2. Погрешность аппроксимации	91
3.5.3. Монотонность, двусторонние и априорные оценки приближенного решения	93
4. Монотонные разностные схемы	98
4.1. Монотонные схемы для стационарного уравнения конвекции– диффузии–реакции	98
4.1.1. Равномерные сетки	98
4.1.2. Неравномерные сетки	101
4.2. Компактная безусловно монотонная схема четвертого порядка точности	103
4.3. Некоторые применения принципа максимума	106
4.3.1. Схемы с весами	107
4.3.2. Принцип максимума для производных	107
4.3.3. Экономичные монотонные схемы полной аппроксимации....	109
4.3.4. Монотонные схемы на неравномерных сетках	112
4.4. Разностные схемы для уравнения Пуассона в двумерной произвольной области	116
4.4.1. Разностная схема и погрешность аппроксимации	117
4.4.2. Априорные оценки устойчивости	120
4.5. Экономичные монотонные схемы для квазилинейных параболических уравнений	122
4.5.1. Разностная схема	123
4.5.2. Эквивалентность векторно-аддитивных и локально- одномерных схем	125
4.5.3. Монотонность и априорные оценки.....	125
4.6. Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными	127
4.6.1. Эллиптические уравнения	128
4.6.2. Квазилинейное параболическое уравнение	133
4.7. Разностные схемы повышенного порядка точности для дифференциальных уравнений с граничными условиями Неймана и Робина.....	145
4.7.1. Краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения	145
4.7.2. Монотонные схемы четвертого порядка аппроксимации	147

4.7.3. Задача Неймана	149
4.7.4. Третья краевая задача для многомерного квазилинейного параболического уравнения	151
4.8. Монотонные и экономичные схемы на неравномерных сетках для многомерного параболического уравнения с граничным условием третьего рода	155
4.8.1. Постановка задачи	155
4.8.2. Разностная схема	155
4.8.3. Погрешность метода	157
4.8.4. Априорные оценки	158
4.9. Монотонные схемы для двумерных квазилинейных параболических задач со смешанными граничными условиями	159
4.9.1. Разностные схемы	160
4.9.2. Двусторонние оценки численного решения	161
4.10. Численные методы для одномерной нелинейной модели Био	163
4.10.1. Постановка задачи	163
4.10.2. Разностная схема и ее свойства	164
4.10.3. Вычислительные эксперименты	167
4.11. Монотонные разностные схемы для систем эллиптических и параболических уравнений	169
4.11.1. Нестандартный принцип максимума для векторно- разностных схем	169
4.11.2. Разностные схемы на равномерных сетках для двумерной слабо связанной линейной эллиптической системы уравнений типа реакции-диффузии	174
4.11.3. Разностные схемы на равномерных сетках для двумерной слабо связанной линейной эллиптической системы уравнений типа конвекции-диффузии-реакции	178
4.11.4. Разностные схемы на равномерных сетках для слабо связанной системы двумерных квазилинейных параболических уравнений	181
5. Устойчивость разностных схем для нелинейных задач математической физики	185
5.1. Дискретные аналоги теорем сравнения и их применение	185
5.1.1. Постановка задачи и разностные схемы	186
5.1.2. Дискретный аналог дифференциальных неравенств	187
5.1.3. Режимы с обострением в квазилинейных параболических уравнениях	189
5.2. Квазилинейное уравнение переноса	190
5.2.1. Постановка одномерной дифференциальной задачи и ее свойства	191
5.2.2. Влияние начального условия на образование ударной волны	192
5.2.3. Влияние граничного условия и правой части на образование ударной волны	192

5.2.4.	Сеточный принцип максимума и дискретный аналог леммы Бихари	194
5.2.5.	Разностные схемы для нелинейного скалярного закона сохранения	197
5.2.6.	Консервативная, точная и устойчивая схемы на ударной волне	201
5.3.	Многомерный скалярный закон сохранения	204
5.4.	Квазилинейное уравнение переноса с нелинейным источником	210
5.4.1.	Постановка задачи	211
5.4.2.	Разностная схема	212
5.4.3.	Погрешность аппроксимации	213
5.4.4.	Устойчивость разностной схемы	214
5.4.5.	Сходимость	217
5.5.	Уравнение слабосжимаемой жидкости	218
5.5.1.	Постановка задачи	218
5.5.2.	Вспомогательные результаты	219
5.5.3.	Исследование устойчивости	220
5.5.4.	Исследование сходимости	228
5.6.	Уравнения газовой динамики в переменных Эйлера с дозвуковыми течениями	229
5.6.1.	Показатель адиабаты $\gamma = 1$	230
5.6.2.	Показатель адиабаты $1 < \gamma < 3$	231
5.6.3.	Случай $\gamma > 3$	233
5.7.	Уравнения газовой динамики в переменных Лагранжа	233
5.7.1.	Устойчивость разностной схемы	235
5.8.	Уравнение Фишера	237
5.8.1.	Глобальная устойчивость	237
5.8.2.	Многомерное уравнение Фишера	241
5.8.3.	Другие априорные оценки	242
5.8.4.	Устойчивость по начальным данным в $L_2(\omega_h)$	245
5.9.	Параболические уравнения с нелинейным источником квадратичного типа	249
5.9.1.	Разностные схемы	250
5.9.2.	Априорные оценки	251
5.9.3.	Сильное или грубое разрушение	252
5.10.	Уравнения с источником $Q(u) = cu u ^{p-1}$	253
5.10.1.	Глобальная устойчивость решений дифференциальной задачи	253
5.10.2.	Глобальная устойчивость разностной схемы	258
5.10.3.	Устойчивость при возможном разрушении решения	260
5.10.4.	Устойчивость решения разностной схемы при разрушении	262
5.11.	Простейшее квазилинейное уравнение	264
5.11.1.	Постановка задачи и разностная схема	264
5.11.2.	Двусторонняя оценка	265
5.11.3.	Устойчивость при $u_0'' \leq 0$, $\mu_k(t) \leq 0$, $k = 1, 2$	265
5.11.4.	Устойчивость в общем случае	266

5.12. Многомерное уравнение пористой среды с квадратичной нелинейностью	267
5.12.1. Вспомогательные результаты. Принцип максимума	268
5.12.2. Постановка дифференциальной задачи и разностные схемы	269
5.12.3. Некоторые свойства сеточных операторов	270
5.12.4. Задача для погрешности соседних итераций $\bar{z}^{s+1} = \bar{v}^{s+1} - \bar{v}^s$..	273
5.12.5. Априорная оценка устойчивости в общем случае	275
5.13. Многомерное параболическое уравнение с источником	279
5.13.1. Введение и постановка задачи	279
5.13.2. Основное энергетическое неравенство при $m = 2, 3$	281
5.13.3. Априорные оценки	283
5.13.4. Оценки верхних и нижних границ времени существования ограниченного решения	284
5.13.5. Асимптотически согласованные разностные схемы	285
5.13.6. Энергетическое неравенство для решения разностной схемы в нелинейном случае	286
5.13.7. Глобальная априорная оценка	287
5.13.8. Априорные оценки в случае разрушения решения	288
5.13.9. Устойчивость разностной схемы	288
5.14. О роли законов сохранения в квазилинейных задачах локализации тепла и режимов с обострением	289
5.14.1. Закон сохранения для дифференциальной задачи	290
5.14.2. Сеточный закон сохранения	292
5.15. Устойчивость векторно-аддитивных схем	294
5.16. Асимптотическая устойчивость дифференциально-операторных уравнений первого и второго порядка	298
5.16.1. Уравнение первого порядка	299
5.16.2. Неполное уравнение второго порядка	305
5.16.3. Полное уравнение второго порядка	308
5.16.4. Асимптотическая устойчивость однородного дифференциально-операторного уравнения второго порядка	309
6. Сходимость разностных схем для нелинейных задач математической физики и задач с обобщенными решениями ...	312
6.1. Двухэтапный энергетический метод	312
6.1.1. Введение	312
6.1.2. Оценки точности разностных схем, аппроксимирующих систему уравнений акустики	313
6.1.3. Оценки точности разностных схем для линейных параболических и гиперболических уравнений второго порядка	315
6.2. О безусловной сходимости разностных схем для уравнений газовой динамики в переменных Лагранжа	317

6.3.	О сходимости в равномерной норме разностных схем для нестационарных квазилинейных уравнений математической физики	320
6.3.1.	Постановка задачи	320
6.3.2.	Оценки точности разностных схем для одномерных нелинейных параболических уравнений	321
6.3.3.	Оценки точности разностных схем для одномерных квазилинейных гиперболических уравнений	323
6.3.4.	Оценки скорости сходимости разностных схем для многомерных параболических уравнений	324
6.4.	Согласованные оценки скорости сходимости метода сеток для нелинейного уравнения второго порядка с обобщенными решениями	325
6.4.1.	Постановка задачи	326
6.4.2.	Разностная схема и итерационный метод	326
6.4.3.	Вспомогательные результаты	327
6.4.4.	Теорема о сходимости метода итераций	330
6.4.5.	Погрешность аппроксимации и сходимость на обобщенном решении	332
6.5.	Устойчивость разностных схем в интегральных по времени нормах	334
6.6.	О сходимости разностных схем для параболических уравнений с обобщенными решениями	338
6.6.1.	Линейное параболическое уравнение	338
6.6.2.	Разностная схема	339
6.6.3.	Погрешность аппроксимации и сходимость	340
6.7.	Полностью консервативные разностные схемы для нелинейных моделей, описывающих динамику материалов с эффектом памяти формы	344
6.7.1.	Дифференциальная задача	344
6.7.2.	Разностная схема и закон сохранения	344
6.8.	Разностные схемы для нелинейного параболического уравнения ...	347
6.9.	Случай слабого обобщенного решения	351
6.9.1.	Определение обобщенного решения	352
6.9.2.	Разностная схема	353
6.9.3.	Предварительные результаты	354
6.9.4.	Двусторонние оценки разностного решения	355
6.9.5.	Свойства решения разностных схем	355
6.9.6.	Задача для ошибки метода	356
6.9.7.	Главное энергетическое тождество	356
6.9.8.	Представление погрешности аппроксимации в дивергентной форме. Оценки точности метода	357
7.	Коэффициентная устойчивость	361
7.1.	Операторные уравнения первого рода	361
7.1.1.	Устойчивость в H_A	361
7.1.2.	Устойчивость в H_{A^*A}	364

7.2.	Двухслойные операторно-разностные схемы.....	367
7.2.1.	Сильная устойчивость дифференциально-операторных уравнений	367
7.2.2.	Сильная устойчивость двухслойных операторно-разностных схем	370
7.3.	Устойчивость в банаховых пространствах	375
7.4.	Коэффициентная устойчивость в интегральных по времени нормах.....	381
7.4.1.	Устойчивость дифференциально-операторных схем	381
7.4.2.	Сильная устойчивость дифференциально-операторных схем	383
7.4.3.	Устойчивость операторно-разностных схем	386
7.4.4.	Сильная устойчивость операторно-разностных схем	388
7.5.	Достаточные условия коэффициентной устойчивости двухслойных операторно-разностных схем	390
7.6.	Критерий коэффициентной устойчивости	393
7.6.1.	Двухслойные операторно-разностные схемы	393
7.6.2.	Устойчивость по входным данным	394
7.6.3.	Связь между устойчивостью по начальным данным, по правой части и коэффициентной устойчивостью	396
7.7.	Дифференциально-операторные уравнения второго порядка.....	400
7.7.1.	Априорные оценки решения	400
7.8.	Трехслойные операторно-разностные схемы	407
7.8.1.	Вспомогательные результаты	407
7.8.2.	Сильная устойчивость в H	409
7.8.3.	Устойчивость в норме H_A	413
7.9.	Полулинейное параболическое уравнение	418
7.9.1.	Коэффициентная устойчивость решения полулинейного параболического уравнения	418
7.9.2.	Априорные оценки решения при произвольном $t \in [0, +\infty)$..	420
7.9.3.	Устойчивость при возмущении коэффициентов.....	421
7.9.4.	Коэффициентная устойчивость разностной схемы для полулинейного параболического уравнения	423
7.9.5.	Глобальные оценки решений разностных схем.....	424
7.9.6.	Коэффициентная устойчивость разностного решения	425
7.10.	Полулинейное гиперболическое уравнение второго порядка.....	426
7.10.1.	Коэффициентная устойчивость решения дифференциальной задачи	426
7.10.2.	Коэффициентная устойчивость разностной схемы	430
8.	Точные разностные схемы	434
8.1.	Введение.....	434
8.2.	Разностные схемы для ОДУ	435
8.2.1.	Точная схема для линейного стационарного уравнения диффузии	435
8.2.2.	Схема для нелинейного ОДУ первого порядка	435

8.3.	Линейное неоднородное уравнение переноса с постоянным коэффициентом	436
8.3.1.	Схема с весами	438
8.4.	Уравнение с нелинейной правой частью	439
8.5.	Уравнение с переменными коэффициентами	439
8.5.1.	Недивергентное уравнение с разделяющимися переменными	439
8.5.2.	Дивергентное уравнение	440
8.6.	Точные схемы для многомерных уравнений	441
8.7.	Монотонные разностные схемы произвольного порядка точности и запрет С. К. Годунова	444
8.7.1.	Введение	444
8.7.2.	Однородное уравнение переноса	446
8.7.3.	Погрешность аппроксимации	447
8.7.4.	Слабые разрывы	448
8.7.5.	Неоднородные уравнения	448
8.7.6.	Вычислительные эксперименты	449
8.8.	Система уравнений акустики	452
8.9.	Разностные схемы для волнового уравнения	453
8.9.1.	Задача Дирихле	453
8.10.	Третья краевая задача	458
8.11.	Квазилинейное уравнение колебаний	463
8.11.1.	Постановка задачи	463
8.11.2.	Схемы на характеристической сетке	464
8.11.3.	Вычислительный эксперимент	467
8.12.	Параболические уравнения с бегущими волнами	469
8.12.1.	Разностная схема	469
8.12.2.	Погрешность аппроксимации	471
8.12.3.	Теорема о точной разностной схеме	471
8.13.	Двумерное уравнение конвекции-диффузии-реакции	473
8.13.1.	Уравнение конвекции-диффузии	474
9.	Компактные разностные схемы	478
9.1.	Параболическое уравнение с постоянными коэффициентами	478
9.1.1.	Краевые условия третьего рода	479
9.2.	Уравнение с переменными коэффициентами	482
9.3.	Квазилинейное уравнение	483
9.4.	Схема для обобщенного уравнения Фишера с нелинейной конвекцией	484
9.4.1.	Монотонные схемы $4 + 1$	484
9.4.2.	Компактные схемы порядка $4 + 2$	486
9.5.	Схемы в многомерном случае	488
9.6.	Существенно нелинейные задачи	489
9.7.	Разностные схемы для уравнения Клейна-Гордона	493
9.7.1.	Уравнение с постоянными коэффициентами	494
9.7.2.	Схемы для уравнений с переменными коэффициентами	496
9.7.3.	Квазилинейное уравнение	497

9.8. Многомерные задачи.....	499
9.8.1. Схемы порядка $4 + 2$	499
9.8.2. Уравнение Клейна–Гордона с переменными коэффициентами	503
9.9. Гиперболо-параболическое уравнение. Схема $4 + 4$	505
9.10. Трехслойные схемы для параболических уравнений	507
Список использованных источников	511