

Математические алгоритмы для программистов

3D-графика, машинное обучение
и моделирование на Python

Пол Орланд



Санкт-Петербург • Москва • Минск

2025

Краткое содержание

Предисловие	20
Благодарности	25
Об этой книге.	27
Об авторе	32
Иллюстрация на обложке	33

Глава 1. Математика в программном коде.	34
--	-----------

Часть I Векторы и графика

Глава 2. Рисование с помощью двумерных векторов	57
Глава 3. Выход в трехмерный мир.	111
Глава 4. Преобразование векторов и графики	164
Глава 5. Вычисление преобразований с помощью матриц.	203
Глава 6. Обобщение до высших размерностей	257
Глава 7. Решение систем линейных уравнений	316

Часть II Математический анализ и моделирование физического мира

Глава 8. Скорость изменения.	367
Глава 9. Моделирование перемещающихся объектов.	405
Глава 10. Работа с символьными выражениями	425
Глава 11. Моделирование силовых полей	468

Глава 12. Оптимизация физической системы	.501
---	-------------

Глава 13. Анализ звуковых волн с использованием рядов Фурье	.547
--	-------------

Часть III
Машинное обучение

Глава 14. Подгонка функций под данные	.589
--	-------------

Глава 15. Классификация данных и логистическая регрессия	.621
---	-------------

Глава 16. Обучение нейронных сетей.	.660
--	-------------

Приложение А. Подготовка к работе с Python.	.697
--	-------------

Приложение Б. Советы и рекомендации по работе с Python	.710
---	-------------

Приложение В. Загрузка и отображение трехмерных моделей с помощью OpenGL и PyGame	.742
---	-------------

Оглавление

Предисловие	20
Как создавалась эта книга	21
Охватываемые математические идеи	23
Благодарности	25
Об этой книге	27
Кому адресована книга	27
Структура издания	28
О примерах кода	29
От издательства	31
Об авторе	32
Иллюстрация на обложке	33
Глава 1. Математика в программном коде	34
1.1. Решение финансовых задач с помощью математики и программного обеспечения	35
1.1.1. Прогнозирование движения финансового рынка	36
1.1.2. Поиск выгодной сделки	38
1.1.3. Трехмерная графика и анимация	41
1.1.4. Моделирование физического мира	43
1.2. Как не надо учить математику	46
1.2.1. Джейн решила подучить математику	46
1.2.2. Кропотливое изучение учебников по математике	48
1.3. Использование натренированного левого полушария	49
1.3.1. Использование формального языка	49
1.3.2. Создайте свой калькулятор	50
1.3.3. Создание абстракций с помощью функций	52
Краткие итоги главы	54

Часть I

Векторы и графика

Глава 2. Рисование с помощью двухмерных векторов	57
2.1. Изображение двухмерных векторов	58
2.1.1. Представление двухмерных векторов	60
2.1.2. Рисование двухмерных изображений на Python	62
2.1.3. Упражнения	65
2.2. Арифметика двухмерных векторов	68
2.2.1. Компоненты вектора и его длина	70
2.2.2. Умножение вектора на число	72
2.2.3. Вычитание, смещение и расстояние	73
2.2.4. Упражнения	75
2.3. Углы и тригонометрия на плоскости	85
2.3.1. От углов к компонентам	86
2.3.2. Радианы и тригонометрия в Python	91
2.3.3. От компонентов к углам	92
2.3.4. Упражнения	95
2.4. Преобразование наборов векторов	104
2.4.1. Комбинирование векторных преобразований	105
2.4.2. Упражнения	107
2.5. Рисование с помощью Matplotlib	109
Краткие итоги главы	110
Глава 3. Выход в трехмерный мир	111
3.1. Отображение векторов в трехмерном пространстве	113
3.1.1. Представление трехмерных векторов с помощью координат	115
3.1.2. Рисование трехмерных изображений с помощью Python	117
3.1.3. Упражнения	120
3.2. Арифметика трехмерных векторов	121
3.2.1. Сложение трехмерных векторов	121
3.2.2. Умножение трехмерных векторов на скаляр	123
3.2.3. Вычитание трехмерных векторов	124
3.2.4. Вычисление длин и расстояний	124
3.2.5. Вычисление углов и направлений	126
3.2.6. Упражнения	127
3.3. Скалярное произведение векторов: мера сонаправленности векторов	132
3.3.1. Изображение скалярного произведения	132
3.3.2. Вычисление скалярного произведения	135
3.3.3. Примеры скалярных произведений	137

3.3.4. Измерение углов с помощью скалярного произведения	138
3.3.5. Упражнения	140
3.4. Векторное произведение: мера ориентированной площади	144
3.4.1. Ориентация в трехмерном пространстве	144
3.4.2. Определение направления с помощью векторного произведения	147
3.4.3. Определение длины векторного произведения	149
3.4.4. Вычисление векторного произведения трехмерных векторов	151
3.4.5. Упражнения	152
3.5. Отображение трехмерного объекта на двухмерной плоскости	157
3.5.1. Определение трехмерного объекта с помощью векторов	157
3.5.2. Проецирование на двухмерную плоскость	159
3.5.3. Ориентация лицевой стороны и затенение	160
3.5.4. Упражнения	162
Краткие итоги главы	163
Глава 4. Преобразование векторов и графики	164
4.1. Преобразование трехмерных объектов	167
4.1.1. Рисование преобразованного объекта	167
4.1.2. Комбинирование векторных преобразований	169
4.1.3. Поворот объекта вокруг оси	172
4.1.4. Изобретение своих геометрических преобразований	175
4.1.5. Упражнения	177
4.2. Линейные преобразования	182
4.2.1. Сохраняющая векторная арифметика	182
4.2.2. Изображение линейных преобразований	184
4.2.3. Полезные свойства линейных преобразований	186
4.2.4. Вычисление результатов линейных преобразований	191
4.2.5. Упражнения	194
Краткие итоги главы	201
Глава 5. Вычисление преобразований с помощью матриц	203
5.1. Представление линейных преобразований в виде матриц	204
5.1.1. Запись векторов и линейных преобразований в виде матриц	205
5.1.2. Умножение матрицы на вектор	206
5.1.3. Объединение линейных преобразований путем умножения матриц	208
5.1.4. Реализация умножения матриц	211
5.1.5. Анимация в трехмерном пространстве с помощью матричных преобразований	212
5.1.6. Упражнения	214

5.2. Интерпретация матриц разной формы	221
5.2.1. Векторы-столбцы как матрицы	222
5.2.2. Какие пары матриц можно перемножить?	224
5.2.3. Квадратные и прямоугольные матрицы как векторные функции	226
5.2.4. Проекция как линейное отображение трехмерного объекта на двумерную плоскость	228
5.2.5. Составление линейных отображений	231
5.2.6. Упражнения	233
5.3. Параллельный перенос векторов с помощью матриц	239
5.3.1. Придание линейности параллельному переносу	240
5.3.2. Поиск трехмерной матрицы для двумерного параллельного переноса	243
5.3.3. Комбинирование параллельного переноса с другими линейными преобразованиями	244
5.3.4. Параллельный перенос трехмерных объектов в четырехмерном мире	246
5.3.5. Упражнения	250
Краткие итоги главы	255
Глава 6. Обобщение до высших размерностей	257
6.1. Обобщение определения векторов	258
6.1.1. Создание класса векторов с двумя координатами	259
6.1.2. Усовершенствование класса Vec2	261
6.1.3. Повторение процесса для трехмерных векторов	262
6.1.4. Конструирование базового класса векторов	263
6.1.5. Определение векторных пространств	265
6.1.6. Модульное тестирование классов векторных пространств	267
6.1.7. Упражнения	270
6.2. Исследование различных векторных пространств	274
6.2.1. Перечисление всех пространств координатных векторов	274
6.2.2. Идентификация векторных пространств в «дикой природе»	276
6.2.3. Интерпретация функций как векторов	279
6.2.4. Интерпретация матриц как векторов	281
6.2.5. Обработка изображений с помощью векторных операций	283
6.2.6. Упражнения	286
6.3. Поиск меньших векторных пространств	294
6.3.1. Идентификация подпространств	295
6.3.2. Начнем с единственного вектора	297
6.3.3. Охват большего пространства	297
6.3.4. Определение размерности	300

6.3.5. Определение подпространств векторного пространства функций	301
6.3.6. Подпространства изображений	303
6.3.7. Упражнения	307
Краткие итоги главы	314
Глава 7. Решение систем линейных уравнений	316
7.1. Разработка аркадной игры	318
7.1.1. Моделирование игры	318
7.1.2. Отображение игрового поля	319
7.1.3. Стрельба из лазерной пушки	321
7.1.4. Упражнения	322
7.2. Определение точек пересечения линий	323
7.2.1. Выбор правильной формулы прямой	323
7.2.2. Поиск стандартной формы уравнения прямой	325
7.2.3. Линейные уравнения в матричной записи	328
7.2.4. Решение линейных уравнений с помощью NumPy	330
7.2.5. Определение факта попадания в астероид	331
7.2.6. Определение систем без решения	333
7.2.7. Упражнения	335
7.3. Обобщение линейных уравнений на большее число измерений	341
7.3.1. Представление плоскостей в трех измерениях	341
7.3.2. Решение систем трех линейных уравнений	343
7.3.3. Алгебраическое изучение гиперплоскостей	345
7.3.4. Подсчет числа измерений, уравнений и решений	347
7.3.5. Упражнения	349
7.4. Изменение базиса путем решения линейных уравнений	358
7.4.1. Решение трехмерного примера	361
7.4.2. Упражнения	362
Краткие итоги главы	363

Часть II

Математический анализ и моделирование физического мира

Глава 8. Скорость изменения	367
8.1. Вычисление среднего расхода по объему	369
8.1.1. Реализация функции <code>average_flow_rate</code>	370
8.1.2. Изображение среднего расхода секущей прямой	371
8.1.3. Отрицательные скорости изменения	372
8.1.4. Упражнения	374

8.2. График зависимости средней скорости от времени	375
8.2.1. Определение среднего расхода в разные промежутки времени	376
8.2.2. График интервальных расходов	377
8.2.3. Упражнения.	379
8.3. Аппроксимация значений мгновенного расхода	380
8.3.1. Определение наклона секущих прямых на коротких интервалах	381
8.3.2. Построение функции мгновенного расхода	384
8.3.3. Каррирование и построение графика функции мгновенного расхода	386
8.3.4. Упражнения.	388
8.4. Аппроксимация изменения объема	389
8.4.1. Вычисление изменения объема за короткий промежуток времени	390
8.4.2. Разбиение временного отрезка на мелкие интервалы	391
8.4.3. Изображение изменения объема на графике расхода	392
8.4.4. Упражнения.	395
8.5. График изменения объема с течением времени	395
8.5.1. Вычисление объема в заданный момент времени	396
8.5.2. Представление сумм Римана для функции объема	397
8.5.3. Улучшение аппроксимации	400
8.5.4. Определенные и неопределенные интегралы	402
Краткие итоги главы	404
Глава 9. Моделирование перемещающихся объектов.	405
9.1. Имитация движения с постоянной скоростью	406
9.1.1. Добавление в астероиды информации о скоростях	407
9.1.2. Добавление поддержки перемещения астероидов в игровой движок	407
9.1.3. Удержание астероидов в пределах экрана	408
9.1.4. Упражнения.	410
9.2. Моделирование ускорения.	411
9.2.1. Ускоренное движение космического корабля.	411
9.3. Более глубокое погружение в метод Эйлера.	413
9.3.1. Вычисления методом Эйлера вручную	413
9.3.2. Реализация алгоритма на Python.	415
9.4. Применение метода Эйлера с уменьшенным временным шагом	417
9.4.1. Упражнения.	419
Краткие итоги главы	424

Глава 10. Работа с символьными выражениями	425
10.1. Поиск точной производной с помощью системы компьютерной алгебры	426
10.1.1. Выполнение символьных операций на Python	428
10.2. Моделирование алгебраических выражений	429
10.2.1. Разбиение выражения на части	430
10.2.2. Конструирование дерева выражения	431
10.2.3. Представление дерева выражений на Python	432
10.2.4. Упражнения	435
10.3. Практическое применение символьных выражений	438
10.3.1. Поиск всех переменных в выражении	438
10.3.2. Вычисление выражения	440
10.3.3. Разложение выражения	443
10.3.4. Упражнения	446
10.4. Поиск производной функции	448
10.4.1. Производные степеней	448
10.4.2. Производные преобразованных функций	450
10.4.3. Производные некоторых специальных функций	452
10.4.4. Производные произведений и сложных функций	453
10.4.5. Упражнения	454
10.5. Автоматическое взятие производной	457
10.5.1. Реализация метода вычисления производной для выражений	457
10.5.2. Реализация правила произведения и цепного правила	459
10.5.3. Реализация степенного правила	460
10.5.4. Упражнения	462
10.6. Символьное интегрирование функций	463
10.6.1. Интегралы как первообразные	463
10.6.2. Введение в библиотеку SymPy	464
10.6.3. Упражнения	465
Краткие итоги главы	467
Глава 11. Моделирование силовых полей	468
11.1. Моделирование гравитации с помощью векторного поля	469
11.1.1. Моделирование гравитации с помощью функции потенциальной энергии	470
11.2. Моделирование гравитационных полей	473
11.2.1. Определение векторного поля	473
11.2.2. Определение простого силового поля	475
11.3. Добавление гравитации в игру с астероидами	476

11.3.1. Реализация воздействия гравитации на игровые объекты	478
11.3.2. Упражнения	481
11.4. Потенциальная энергия	482
11.4.1. Определение скалярного поля потенциальной энергии.	483
11.4.2. Представление скалярного поля в виде тепловой карты	486
11.4.3. Представление скалярного поля в виде карты рельефа	486
11.5. Связь энергии и сил с градиентом	487
11.5.1. Измерение крутизны с помощью поперечных сечений	488
11.5.2. Расчет частных производных	490
11.5.3. Определение крутизны графика с использованием градиента	492
11.5.4. Расчет силовых полей на основе потенциальной энергии с градиентом	494
11.5.5. Упражнения	497
Краткие итоги главы	500
Глава 12. Оптимизация физической системы	501
12.1. Тестирование модели ядра	504
12.1.1. Моделирование с помощью метода Эйлера	505
12.1.2. Измерение характеристик траектории	506
12.1.3. Исследование различных углов выстрела	507
12.1.4. Упражнения	508
12.2. Вычисление оптимальной дальности	512
12.2.1. Определение дальности в зависимости от угла выстрела	512
12.2.2. Решение для вычисления максимальной дальности	515
12.2.3. Идентификация максимумов и минимумов	517
12.2.4. Упражнения	519
12.3. Усовершенствование модели	521
12.3.1. Добавление еще одного измерения.	522
12.3.2. Моделирование рельефа местности вокруг пушки.	523
12.3.3. Решение для вычисления дальности стрельбы в трехмерном пространстве	525
12.3.4. Упражнения	528
12.4. Оптимизация дальности с помощью градиентного восхождения	531
12.4.1. График зависимости дальности от параметров стрельбы	531
12.4.2. Градиент функции дальности	532
12.4.3. Поиск направления подъема в гору с помощью градиента	534
12.4.4. Реализация градиентного восхождения.	536
12.4.5. Упражнения	540
Краткие итоги главы	545

Глава 13. Анализ звуковых волн с использованием рядов Фурье	547
13.1. Объединение звуковых волн и их разложение	549
13.2. Воспроизведение звуковых волн в Python	551
13.2.1. Воспроизведение первого звука	551
13.2.2. Воспроизведение музыкальной ноты	555
13.2.3. Упражнения	557
13.3. Преобразование синусоидальной волны в звук	557
13.3.1. Создание звука на основе синусоидальных функций	558
13.3.2. Изменение частоты синусоиды	559
13.3.3. Выборка и воспроизведение звуковой волны	562
13.3.4. Упражнения	563
13.4. Объединение звуковых волн	565
13.4.1. Сложение выборок звуковых волн для получения аккорда	565
13.4.2. Изображение графика суммы двух звуковых волн	566
13.4.3. Построение линейной комбинации синусоид	568
13.4.4. Построение знакомых функций с помощью синусоид	570
13.4.5. Упражнения	573
13.5. Разложение звуковой волны в ряд Фурье	573
13.5.1. Поиск компонент вектора с помощью внутреннего произведения	575
13.5.2. Определение внутреннего произведения периодических функций	576
13.5.3. Определение функции для поиска коэффициентов Фурье	579
13.5.4. Поиск коэффициентов Фурье для прямоугольной волны	580
13.5.5. Коэффициенты Фурье для других волнообразных функций	581
13.5.6. Упражнения	583
Краткие итоги главы	585

Часть III

Машинное обучение

Глава 14. Подгонка функций под данные	589
14.1. Измерение качества соответствия функции	593
14.1.1. Измерение отклонения функции	593
14.1.2. Суммирование квадратов ошибок	596
14.1.3. Вычисление потерь для функций цены автомобиля	598
14.1.4. Упражнения	601
14.2. Исследование пространств функций	603
14.2.1. График функции потерь для прямых, проходящих через начало координат	604

14.2.2. Пространство всех линейных функций	606
14.2.3. Упражнения	607
14.3. Поиск прямой наилучшего соответствия с помощью градиентного спуска	608
14.3.1. Изменение масштаба данных	608
14.3.2. Поиск и построение линии наилучшего соответствия.	609
14.3.3. Упражнения	611
14.4. Подбор нелинейной функции	612
14.4.1. Особенности поведения экспоненциальных функций.	613
14.4.2. Нахождение экспоненциальной функции наилучшего соответствия	615
14.4.3. Упражнения	617
Краткие итоги главы	620
Глава 15. Классификация данных и логистическая регрессия	621
15.1. Оценка функции классификации на реальных данных	623
15.1.1. Загрузка данных об автомобилях.	624
15.1.2. Оценка функции классификации.	625
15.1.3. Упражнения	626
15.2. Изображение границ решения.	627
15.2.1. Изображение пространства автомобилей.	628
15.2.2. Определение лучшей границы решения	629
15.2.3. Реализация функции классификации	631
15.2.4. Упражнение	632
15.3. Классификация как задача регрессии	633
15.3.1. Масштабирование исходных данных об автомобилях.	634
15.3.2. Оценка схожести автомобиля на BMW	635
15.3.3. Знакомство с сигмоидной функцией.	637
15.3.4. Комбинирование сигмоидной функции с другими функциями	638
15.3.5. Упражнения	642
15.4. Исследование пространства возможных логистических функций	643
15.4.1. Параметризация логистических функций	644
15.4.2. Оценка качества соответствия логистической функции	645
15.4.3. Тестирование разных логистических функций	647
15.4.4. Упражнения	648
15.5. Поиск лучшей логистической функции	651
15.5.1. Градиентный спуск в трех измерениях	651
15.5.2. Использование градиентного спуска для поиска наилучшего соответствия	652

15.5.3. Оценка лучшего логистического классификатора	654
15.5.4. Упражнения	656
Краткие итоги главы	658
Глава 16. Обучение нейронных сетей.	660
16.1. Классификация данных с помощью нейронных сетей	662
16.2. Классификация изображений рукописных цифр	664
16.2.1. Построение 64-мерных векторов изображения	664
16.2.2. Построение случайного классификатора цифр	666
16.2.3. Оценка характеристик классификатора цифр	667
16.2.4. Упражнения	668
16.3. Проектирование нейронной сети	670
16.3.1. Организация нейронов и связей между ними	670
16.3.2. Поток данных через нейронную сеть	671
16.3.3. Вычисление активаций	674
16.3.4. Вычисление активаций в матричной записи	676
16.3.5. Упражнения	678
16.4. Создание нейронной сети на Python	680
16.4.1. Реализация класса MLP на Python	680
16.4.2. Вычисления в MLP	683
16.4.3. Проверка качества классификации моделью MLP	684
16.4.4. Упражнения	684
16.5. Обучение нейронной сети с помощью градиентного спуска	685
16.5.1. Обучение как задача минимизации	685
16.5.2. Вычисление градиентов с обратным распространением	687
16.5.3. Автоматическое обучение с помощью scikit-learn	687
16.5.4. Упражнения	689
16.6. Расчет градиентов в ходе обратного распространения	692
16.6.1. Вычисление потерь в терминах весов последнего слоя	692
16.6.2. Вычисление частных производных для весов последнего слоя с помощью цепного правила	693
16.6.3. Упражнения	695
Краткие итоги главы	695
Приложение А. Подготовка к работе с Python	697
А.1. Проверка наличия Python в системе	697
А.2. Загрузка и установка Anaconda	698
А.3. Применение Python в интерактивном режиме	700
А.3.1. Создание и запуск файла сценария на Python	701
А.3.2. Использование блокнотов Jupyter	704

Приложение Б. Советы и рекомендации по работе с Python	710
Б.1. Числа и математика в Python	710
Б.1.1. Модуль math	711
Б.1.2. Случайные числа	712
Б.2. Наборы данных в Python	713
Б.2.1. Списки	713
Б.2.2. Другие итерируемые объекты	717
Б.2.3. Функции-генераторы	718
Б.2.4. Кортежи	719
Б.2.5. Множества	720
Б.2.6. Массивы NumPy	721
Б.2.7. Словари	722
Б.2.8. Полезные функции для работы с наборами данных	723
Б.3. Работа с функциями	723
Б.3.1. Передача функциям нескольких входных данных	724
Б.3.2. Именованные аргументы	725
Б.3.3. Функции как данные	726
Б.3.4. Лямбда-выражения: анонимные функции	728
Б.3.5. Применение функций к массивам NumPy	729
Б.4. Данные с плавающей точкой и Matplotlib	730
Б.4.1. Создание диаграммы рассеяния	730
Б.4.2. Создание линейной диаграммы	731
Б.4.3. Дополнительные настройки диаграмм	732
Б.5. Объектно-ориентированное программирование на Python	734
Б.5.1. Определение классов	734
Б.5.2. Определение методов	735
Б.5.3. Специальные методы	736
Б.5.4. Перегрузка операторов	737
Б.5.5. Методы класса	738
Б.5.6. Наследование и абстрактные классы	739
Приложение В. Загрузка и отображение трехмерных моделей с помощью OpenGL и PyGame	742
В.1. Воссоздание октаэдра из главы 3	742
В.2. Изменение точки зрения	746
В.3. Загрузка и отображение чайника из Юты	748
В.4. Упражнения	750