

Н. С. Коваленко Н. А. Дегтяренко М. Н. Василевич

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано*

*Учебно-методическим объединением  
по естественно-научному образованию  
в качестве учебно-методического пособия  
для студентов учреждений высшего образования,  
обучающихся по специальностям  
«химия», «химия лекарственных соединений»,  
«химия высоких энергий», «фундаментальная химия»*

# СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
<b>1. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ .....</b>	<b>4</b>
1.1. Числовые функции одной действительной переменной .....	4
1.1.1. Понятие числовой функции. Способы задания числовых функций.....	4
1.1.2. Некоторые характеристики функций.....	6
1.1.3. Обратная, сложная и элементарные функции .....	6
1.2. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности.....	7
1.3. Основные свойства пределов числовых последовательностей .....	12
1.4. Число $e$ . Примеры нахождения пределов последовательностей при помощи основных свойств.....	16
1.5. Предел функции в точке. Односторонние пределы функции в точке.....	21
1.6. Конечный предел функции при аргументе, стремящемся к бесконечности. Бесконечно большие функции .....	25
1.6.1. Конечный предел функции при $x \rightarrow +\infty$ ( $-\infty; \infty$ ).....	25
1.6.2. Бесконечно большие функции при $x \rightarrow x_0$ .....	27
1.7. Основные свойства пределов функций.....	31
1.8. Замечательные пределы. Примеры нахождения пределов функций.....	35
1.9. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции .....	39
1.10. Непрерывность и разрывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции.....	43
1.10.1. Непрерывность функции в точке.....	43
1.10.2. Разрывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции.....	46
1.11. Основные свойства непрерывных функций .....	48
Задачи.....	51
Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля .....	60
<b>2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....</b>	<b>63</b>
2.1. Приращение функции и аргумента.....	63
2.2. Определение производной, ее геометрический и физический смысл .....	63
2.3. Правила дифференцирования функций .....	65
2.4. Производная сложной функции .....	66
2.5. Производные высших порядков. Неявное, логарифмическое и параметрическое дифференцирование.....	67
2.6. Дифференциал функции и его приложения.....	71
2.6.1. Правила нахождения дифференциала функции.....	71
2.6.2. Связь непрерывности и дифференцируемости.....	73

2.7. Формулы Тейлора и Маклорена .....	73
2.8. Приложения производных .....	76
2.8.1. Правило Лопиталю – Бернулли .....	76
2.8.2. Раскрытие неопределенностей вида $0 \cdot \infty$ , $\infty - \infty$ , $1^\infty$ , $0^0$ , $\infty^0$ .....	76
2.8.3. Возрастание и убывание функций. Локальные максимумы и минимумы .....	78
2.8.4. Локальные максимумы и минимумы .....	79
2.8.5. Алгоритм исследования функции на экстремум и интервалы монотонности .....	80
2.8.6. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной (второе достаточное условие экстремума) .....	82
2.8.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке .....	82
2.8.8. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба .....	83
2.8.9. Асимптоты .....	88
2.8.10. Схема исследования и построения графиков функций .....	89
Задачи для самостоятельного решения .....	93
Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля .....	97
<b>3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ</b> .....	<b>100</b>
3.1. Первообразная и неопределенный интеграл .....	100
3.2. Свойства неопределенного интеграла .....	101
3.3. Метод непосредственного интегрирования .....	102
3.4. Метод подстановки или замены переменной интегрирования .....	102
3.5. Интегрирование по частям .....	106
3.6. Методы интегрирования специальных классов функций .....	107
3.6.1. Интегрирование дробно-рациональных функций .....	107
3.6.2. Интегрирование простейших рациональных дробей .....	108
3.6.3. Разложение правильной рациональной дроби на простейшие .....	110
3.6.4. Метод неопределенных коэффициентов .....	111
3.6.5. Интегрирование правильных рациональных дробей .....	112
3.7. Интегрирование некоторых видов тригонометрических выражений .....	113
3.7.1. Интегралы, содержащие произведения тригонометрических функций .....	113
3.7.2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$ , $m, n \in \mathbb{N}$ .....	114
3.7.3. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ , $R(u, v)$ – рациональная функция .....	114
3.8. Интегрирование некоторых иррациональных функций .....	115
3.8.1. Интегралы с линейной иррациональностью .....	115
3.8.2. Интегралы с квадратичной иррациональностью .....	116
3.8.3. Интегралы с квадратичной иррациональностью в знаменателе дроби .....	118
Задачи для самостоятельного решения .....	119
Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля .....	132

4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ .....	136
4.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Понятие определенного интеграла .....	136
4.2. Свойства определенного интеграла .....	140
4.3. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница .....	142
4.4. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле .....	145
4.5. Вычисление площадей плоских фигур.....	148
4.6. Вычисление объемов геометрических тел .....	152
4.7. Длина дуги плоской кривой. Площадь поверхности вращения .....	155
4.8. Приложения определенного интеграла к задачам физики и химии.....	158
4.9. Несобственные интегралы.....	162
4.9.1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования.....	162
4.9.2. Интегралы от неограниченных функций .....	167
4.10. Приближенное вычисление определенного интеграла .....	171
Задачи.....	177
Задачи для самостоятельного решения .....	180
5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ .....	183
5.1. Основные понятия.....	183
5.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных .....	188
5.3. Частные производные функции нескольких переменных.....	192
5.4. Полный дифференциал функции нескольких переменных .....	197
5.5. Дифференцирование сложных и неявных функций .....	200
5.6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности .....	204
5.7. Экстремумы функции нескольких переменных.....	205
5.8. Условный экстремум.....	208
5.9. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в ограниченной замкнутой области .....	211
5.10. Производная в данном направлении. Градиент функции .....	214
5.11. Метод наименьших квадратов .....	216
Задачи.....	220
Задачи для самостоятельного решения .....	226
6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ .....	228
6.1. Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Дифференциальные уравнения первого порядка .....	228
6.2. Простейшие дифференциальные уравнения и уравнения с разделенными и разделяющимися переменными .....	231
6.3. Однородные дифференциальные уравнения.....	235
6.4. Линейные дифференциальные уравнения .....	239
6.5. Уравнения в полных дифференциалах.....	241
6.6. Дифференциальные уравнения второго порядка .....	243
6.7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами .....	248

6.8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами .....	250
6.9. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям .....	256
Задачи .....	264
Задачи для самостоятельного решения .....	268
Задачи повышенной сложности из фондов студенческих олимпиад по математике для факультетов нематематического профиля .....	270
<b>7. ДВОЙНЫЕ И ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ .....</b>	<b>272</b>
7.1. Двойные интегралы: определение и свойства .....	272
7.1.1. Вычисление двойного интеграла .....	274
7.1.2. Замена переменных в двойных интегралах .....	285
7.1.3. Двойной интеграл в полярных координатах .....	288
7.1.4. Приложения двойных интегралов .....	292
7.2. Тройные интегралы .....	298
7.2.1. Сведение тройного интеграла к повторному .....	299
7.2.2. Тройной интеграл в цилиндрических, сферических и обобщенных сферических координатах .....	302
7.2.3. Приложения тройных интегралов .....	306
Задачи .....	307
<b>8. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ .....</b>	<b>313</b>
8.1. Определение числового ряда. Сходимость .....	313
8.2. Достаточные условия сходимости рядов с положительными членами .....	315
8.3. Знакопередающиеся ряды. Абсолютная и условная сходимости .....	319
8.4. Функциональные ряды. Основные понятия .....	320
8.5. Степенные ряды. Основные понятия .....	322
8.6. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Ряд Тейлора и ряд Маклорена .....	325
8.7. Приложения степенных рядов .....	329
8.8. Ряды Фурье .....	332
Задачи .....	335
Задачи для самостоятельного решения .....	340
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>343</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>347</b>