

А. И. Астровский, М. П. Дымков

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Утверждено  
Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебника для студентов учреждений  
высшего образования по экономическим специальностям

В двух частях

Часть 2

Минск БГЭУ 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	8
ПРЕДИСЛОВИЕ .....	13
ВВЕДЕНИЕ .....	15
<b>Глава 1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ .....</b>	<b>17</b>
1.1. Определенный интеграл .....	17
1.1.1. Задачи, приводящие к понятию интеграла ..	18
1.1.2. Определение интеграла Римана .....	21
1.1.3. Основные свойства определенного интеграла .....	25
1.1.4. Интеграл с переменным верхним пределом ..	29
1.2. Неопределенный интеграл .....	31
1.2.1. Первообразная и неопределенный интеграл .....	32
1.2.2. Свойства неопределенного интеграла .....	35
1.2.3. Табличные неопределенные интегралы .....	35
1.3. Основные методы интегрирования .....	37
1.3.1. Непосредственное интегрирование .....	38
1.3.2. Метод подстановки .....	39
1.3.3. Интегрирование по частям .....	41
1.3.4. Интегрирование простейших рациональных дробей .....	44
1.3.5. Разложение на простейшие дроби .....	48
1.4. Интегрирование специальных классов функций ...	53
1.5. Формула Ньютона – Лейбница .....	58
1.6. Основные правила вычисления определенных интегралов .....	61
1.7. Геометрические приложения интеграла .....	63
1.8. Экономические приложения интеграла .....	74
1.9. Несобственные интегралы .....	77

<b>Глава 2. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ</b> . . . . .	83
2.1. Множества в евклидовых пространствах . . . . .	83
2.2. Вещественные функции нескольких переменных . . . . .	87
2.2.1. Определение функции нескольких переменных . . . . .	87
2.2.2. Линии уровня . . . . .	91
2.3. Экономические примеры функций . . . . .	93
2.4. Предел и непрерывность . . . . .	97
2.4.1. Предел функции в точке . . . . .	98
2.4.2. Непрерывность функции . . . . .	101
2.5. Частные производные первого порядка . . . . .	104
2.6. Дифференцируемость и полный дифференциал . . . . .	107
2.6.1. Дифференцируемость функций . . . . .	107
2.6.2. Полный дифференциал . . . . .	108
2.6.3. Производная сложной функции. Полная производная . . . . .	110
2.6.4. Инвариантность формы полного дифференциала . . . . .	113
2.7. Градиент . . . . .	114
2.8. Частные производные высших порядков . . . . .	116
2.9. Экстремумы функций . . . . .	119
2.9.1. Необходимые условия локального экстремума . . . . .	119
2.9.2. Достаточные условия локального экстремума . . . . .	121
2.9.3. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области . . . . .	123
2.10. Метод наименьших квадратов . . . . .	125
2.11. Применение в задачах экономики . . . . .	128
2.11.1. Хозяйство Робинзона . . . . .	128
2.11.2. Прибыль от производства разных видов товара . . . . .	131
2.11.3. Эффективность трудовых и капитальных затрат . . . . .	133

<b>Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ</b> .....	136
3.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям .....	136
3.1.1. Задача о смесях .....	137
3.1.2. Простейшая макроэкономическая модель естественного роста выпуска продукции ....	139
3.2. Понятие дифференциального уравнения и его решения .....	140
3.3. Дифференциальные уравнения первого порядка ...	143
3.3.1. Задача Коши. Теорема Коши. Общее решение .....	143
3.3.2. Геометрический смысл уравнения .....	147
3.3.3. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными .....	149
3.3.4. Однородные уравнения .....	151
3.4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка .....	152
3.5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка .....	158
3.5.1. Общие свойства решений линейных однородных уравнений .....	159
3.5.2. Линейные неоднородные уравнения второго порядка .....	162
3.6. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами .....	165
3.7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами .....	170
3.8. Применение дифференциальных уравнений .....	178
3.8.1. Модели естественного роста .....	178
3.8.2. Модель равновесного рынка с прогнозируемыми ценами .....	188
3.8.3. Макроэкономическая модель Кейнса .....	190
3.8.4. Примеры моделей из физики и техники ....	192
<b>Глава 4. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ</b> .....	198
4.1. Понятие числового ряда и его суммы .....	198

4.2. Основные свойства сходящихся рядов.....	201
4.3. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд.....	203
4.4. Сходимость положительных рядов.....	206
4.5. Признаки сравнения.....	207
4.6. Достаточные условия сходимости.....	210
4.7. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.....	215
4.8. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница.....	217
<b>Глава 5. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.....</b>	<b>222</b>
5.1. Область сходимости степенного ряда.....	222
5.2. Свойства степенных рядов.....	226
5.3. Ряды Маклорена и Тейлора.....	228
5.4. Разложение элементарных функций в степенные ряды.....	232
5.5. Применение рядов в приближенных вычислениях.....	237
<b>Глава 6. Практикум 1 «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ».....</b>	<b>243</b>
6.1. Неопределенный интеграл.....	243
6.2. Определенный интеграл.....	266
<b>Глава 7. Практикум 2 «ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ».....</b>	<b>285</b>
7.1. Функции нескольких переменных.....	285
7.2. Дифференциальное исчисление.....	290
7.3. Экстремум функции двух переменных.....	301
<b>Глава 8. Практикум 3 «ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ».....</b>	<b>308</b>
8.1. Основные понятия. Уравнения первого порядка ..	308
8.2. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения первого порядка.....	311
8.3. Линейные уравнения первого порядка.....	317
8.4. Линейные уравнения второго порядка.....	324

---

8.5. Применение дифференциальных уравнений в физических и экономических задачах .....	334
<b>Глава 9. Практикум 4 «РЯДЫ» .....</b>	<b>343</b>
9.1. Числовые ряды .....	343
9.2. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды .....	349
9.3. Степенные ряды .....	354
9.4. Ряды Маклорена и Тейлора .....	359
9.5. Приложения рядов в вычислениях .....	364
<b>Глава 10. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ .....</b>	<b>370</b>
10.1. Описание тестов .....	370
10.2. Примеры тестовых заданий .....	372
10.3. Примеры вариантов тестов .....	387
<b>Глава 11. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ .....</b>	<b>390</b>
<b>ВОПРОСЫ К СЕССИИ .....</b>	<b>407</b>
<b>РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>411</b>
<b>ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....</b>	<b>413</b>