

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
Институт физики имени Б. И. Степанова

СПИНОРНЫЕ МЕТОДЫ
В КВАНТОВОЙ
МЕХАНИКЕ ЧАСТИЦ
С ВЫСШИМИ СПИНАМИ

Минск
«Беларуская навука»
2024

Оглавление

| | |
|--|----|
| Введение | 7 |
| 1. О геометрии пространства со спинорной структурой | 11 |
| 1.1. Псевдовектор и его пространственный спинор ξ | 11 |
| 1.2. Истинный вектор и его пространственный спинор η | 14 |
| 1.3. Пространственный спинор $\xi_{a_3}(a_1 + ia_2)$ и неаналитичность | 18 |
| 1.4. Вычисление функций $\nabla\xi$ и $\nabla_{\bar{\pi}}\xi$ | 20 |
| 1.5. Особенности спинора $\xi_{a_3}(a_1, a_2)$ | 21 |
| 1.6. Спинор $\eta^{b_3}(b_1 + ib_2)$ и неаналитичность | 25 |
| 1.7. Свойства непрерывности спинора η , функции $\nabla\eta$ и $\nabla_{\bar{\pi}}\eta$ | 26 |
| 1.8. Анализ особенностей спинорных поверхностей $\eta^{b_3}(b_1 + ib_2)$ | 27 |
| 1.9. Сопоставление спинорных ξ - и η -моделей | 28 |
| 2. Параметризация пространственных спиноров криволинейными координатами | 33 |
| 2.1. Параболические цилиндрические координаты | 33 |
| 2.2. Спиноры (ξ, η) и параболические координаты | 40 |
| 2.3. О связи между ξ - и η -моделями, отображение $\xi \implies \eta$ | 43 |
| 2.4. Параметризация спиноров ξ, η эллиптическими координатами | 43 |
| 2.5. Пространственные спиноры и сферические координаты | 53 |
| 3. Симметрия $\widetilde{SU}(2)$ в спинорных пространствах | 57 |
| 3.1. $SU(2)$ -Симметрии в спинорном ξ -пространстве | 57 |
| 3.2. Расширенная группа $\widetilde{SU}(2)$ и проективные представления | 63 |
| 3.3. Плоские вращения спиноров и понятие малой группы | 66 |
| 4. Спинорная структура, переменные Кустанхеймо – Штифеля, расслоение Хопфа | 71 |
| 4.1. Спинорное расширение псевдовекторной модели (x_1, x_2, x_3) | 72 |
| 4.2. Спинорное расширение истинно векторной модели (x_1, x_2, x_3) | 73 |
| 4.3. Параболические координаты и пространственные спиноры | 75 |
| 4.4. О связи между координатами Кустанхеймо – Штифеля для двух пространственных моделей | 77 |
| 5. Спинорная накрывающая полной группы Лоренца и фермионная четность | 79 |
| 5.1. Спинорная накрывающая полной группы Лоренца | 79 |
| 5.2. Представления расширенных спинорных групп | 81 |
| 5.3. Представления накрывающих для групп L_{+-}^{\uparrow} и $L_{+-}^{\uparrow\downarrow}$ | 83 |
| 5.4. О приведении спинорных групп к вещественной форме | 83 |
| 6. Фермион в римановом пространстве-времени | 85 |
| 6.1. Тетрадный метод Тетраде – Вейля – Фока – Иваненко | 85 |
| 6.2. О нахождении спинорных преобразований, $(3 + 1)$ -расщепление | 88 |
| 6.3. Спинорные преобразования и $(2 + 2)$ -расщепление | 89 |

| | |
|--|-----|
| 6.4. Пример спинорных калибровочных преобразований | 90 |
| 6.5. О биспинорных преобразованиях в произвольном базисе | 92 |
| 6.6. Уравнение Дирака в ортогональных координатах | 93 |
| 6.7. Частица Майораны в римановом пространстве-времени | 95 |
| 7. Ортогональные координаты в пространстве E_3 и спинорные преобразования | 97 |
| 7.1. Тетрадный рецепт и спинорная структура пространства-времени | 97 |
| 7.2. E_3 -пространство и спинорные преобразования | 98 |
| 7.3. Круговые цилиндрические координаты | 100 |
| 7.4. Эллиптические координаты | 102 |
| 7.5. Параболические цилиндрические координаты | 108 |
| 7.6. Сферические координаты | 113 |
| 7.7. Параболические координаты | 115 |
| 7.8. Конические координаты | 117 |
| 7.9. Вытянутые сфероидальные координаты | 144 |
| 7.10. Сплюсненные сфероидальные координаты | 145 |
| 7.11. Эллипсоидальные координаты | 145 |
| 7.12. Параболоидальные координаты | 146 |
| 7.13. Бисферические координаты | 147 |
| 7.14. Тороидальные координаты | 148 |
| 8. Спинорная структура и решения уравнения Клейна – Фока – Гордона | 149 |
| 8.1. Параболические цилиндрические координаты | 149 |
| 8.2. Решения уравнения Клейна – Фока – Гордона | 150 |
| 8.3. Проявление спинорной структуры пространства | 154 |
| 8.4. Явный вид оператора $\hat{A} : \hat{A}\Psi = a\Psi$ | 155 |
| 8.5. Соотношения ортогональности и полнота базиса | 156 |
| 8.6. О вычислении матричных элементов физических величин | 158 |
| 9. Уравнение Дирака в пространстве со спинорной структурой | 159 |
| 9.1. Разделение переменных | 159 |
| 9.2. Непрерывность решений и спинорная структура пространства | 164 |
| 10. Пространство постоянной положительной кривизны со спинорной структурой | 167 |
| 10.1. О требовании однозначности фермионных и бозонных волновых функций в римановом пространстве | 167 |
| 10.2. Декартовая и цилиндрическая тетрады в пространстве S_3 | 169 |
| 10.3. Анализ преобразований в пространстве S_3 , спинорная структура | 173 |
| 10.4. Эллиптическое пространство | 184 |
| 10.5. О невозможности 2-кратным расширением эллиптического многообразия построить пространство со спинорной структурой | 189 |
| 11. Уравнение Дирака в статическом пространстве Эйнштейна, сферическая и эллиптическая модели | 197 |
| 11.1. Уравнение Шредингера в сферическом пространстве S_3 | 197 |
| 11.2. Случай эллиптического пространства | 200 |
| 11.3. Уравнение Дирака в цилиндрической тетраде | 202 |
| 11.4. Дополнительные вычисления | 203 |
| 11.5. Калибровочная симметрия и непрерывность решений уравнения Дирака в сферическом пространстве | 205 |
| 11.6. Квантование уровней энергии частицы | 206 |
| 11.7. Волновые функции и непрерывность | 208 |
| 11.8. Эллиптическое пространство и калибровочные преобразования | 210 |
| 11.9. О непрерывности функций в эллиптическом пространстве | 216 |

| | |
|--|-----|
| 12. Уравнение Дирака в криволинейных координатах и метод квадрирования | 219 |
| 12.1. Метод квадрирования | 219 |
| 12.2. Цилиндрические решения уравнения Дирака | 219 |
| 12.3. О цилиндрических решениях типа $\Psi_{\epsilon j p \lambda}(t, \rho, \Phi, z)$ | 221 |
| 12.4. Решения в параболических цилиндрических координатах | 224 |
| 12.5. Калибровочные преобразования и параболическая тетрада | 226 |
| 12.6. Решения в цилиндрических параболических координатах | 229 |
| 12.7. Квадрирование и решения в параболических координатах | 233 |
| 13. Спинорные уравнения Максвелла в римановом пространстве и моделирование материальных сред | 237 |
| 13.1. Спиноры и уравнения Максвелла | 237 |
| 13.2. Разделение переменных в пространстве де Ситтера | 239 |
| 13.3. Решение уравнения в пространстве Минковского | 244 |
| 13.4. Решения уравнения в пространстве де Ситтера | 246 |
| 13.5. Случай пространства анти-де Ситтера | 253 |
| 13.6. Уравнения Максвелла в метрике Шварцшильда | 260 |
| 13.7. Решения уравнений Максвелла в сферическом пространстве | 268 |
| 13.8. Решение уравнения в пространстве Лобачевского | 273 |
| 13.9. Уравнения Максвелла в пространстве Римана, цилиндрическая симметрия | 275 |
| 13.10. Гиперболическое пространство Лобачевского, цилиндрическая симметрия | 283 |
| 13.11. Геометрическое моделирование сред | 289 |
| 13.12. Уравнения Максвелла в неізотропном пространстве | 294 |
| 13.13. Случай недиагональных метрик | 296 |
| 13.14. Общие замечания | 298 |
| 13.15. Уравнения в параболических цилиндрических координатах | 298 |
| 13.16. Калибровочные преобразования, непрерывность решений | 305 |
| 13.17. Оператор спиральности | 310 |
| 14. Уравнение для массивной частицы со спином $3/2$ и оператор спиральности | 319 |
| 14.1. Общая теория частицы со спином $3/2$ | 319 |
| 14.2. Разделение переменных | 324 |
| 14.3. Оператор спиральности | 326 |
| 14.4. Оператор спиральности и решения волнового уравнения | 333 |
| 15. Безмассовая частица со спином $3/2$, оператор спиральности | 339 |
| 15.1. Об описании безмассового поля со спином $3/2$ | 339 |
| 15.2. Плоские волны, ориентированные вдоль оси x_3 | 341 |
| 15.3. Плоские волны вдоль произвольного направления | 343 |
| 15.4. Проверка | 351 |
| 15.5. Связь с исходным базисом | 353 |
| 15.6. Оператор спиральности | 358 |
| 16. Сферически-симметричные решения уравнения для частицы со спином $3/2$ | 367 |
| 16.1. Уравнение для частицы со спином $3/2$ и сферическая симметрия | 367 |
| 16.2. Разделение переменных в основном уравнении | 373 |
| 16.3. Разделение переменных в дополнительных уравнениях | 376 |
| 16.4. Полная система радиальных уравнений | 380 |
| 16.5. Анализ уравнений для функций f_0, g_0 | 381 |
| 16.6. Матричная форма основной системы радиальных уравнений | 382 |
| 16.7. Случай минимального значения $j = 1/2$ | 384 |
| 16.8. Анализ общего случая $j = 3/2, 5/2, \dots$ | 388 |
| 16.9. Сводка промежуточных результатов | 398 |
| 16.10. Три решения системы из шести уравнений 1-го порядка | 399 |

| | |
|---|-----|
| 16.11. Учет алгебраических и дифференциальных условий связи | 405 |
| Список использованных источников | 415 |