

Г. П. Размыслович, А. В. Филиппцов

ГЕОМЕТРИЯ И АЛГЕБРА

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования по специальностям
«Прикладная математика», «Информатика»,
«Кибербезопасность»

Минск
РИВШ
2024

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Некоторые обозначения и сокращения	5
Глава 1. Системы координат	7
1.1. Система декартовых координат на прямой	7
1.2. Системы координат на плоскости	10
1.2.1. Прямоугольная декартова система координат	10
1.2.2. Полярная система координат	12
1.2.3. Связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами	13
1.3. Системы координат в пространстве	14
1.3.1. Прямоугольная декартова система координат	14
1.3.2. Цилиндрические и сферические координаты точки и их связь с прямоугольными декартовыми координатами	16
Глава 2. Векторы	17
2.1. Основные определения и понятия. Линейные операции над векторами	17
2.2. Линейная зависимость и независимость векторов	20
2.3. Проекция точки и вектора на ось и плоскость	23
2.4. Базис на прямой, на плоскости и в пространстве. Координаты вектора	26
2.5. Общая декартова система координат	28
2.5.1. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве	28
2.5.2. Общее преобразование декартовых координат на плоскости	30
2.5.3. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости	32
2.6. Скалярное произведение векторов	36
2.7. Векторное произведение векторов	39
2.8. Смешанное произведение векторов	45
Глава 3. Линии и поверхности первого порядка	49
3.1. Уравнения линий и поверхностей	49
3.2. Прямая	51
3.2.1. Уравнения прямой. Векторно-параметрическое, параметрическое, каноническое уравнения прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки	51
3.2.2. Взаимное расположение двух прямых, заданных векторно-параметрическими уравнениями	53
3.2.3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой на плоскости	54
3.2.4. Уравнение прямой в отрезках	56
3.2.5. Взаимное расположение двух прямых на плоскости	57
3.2.6. Нормальное уравнение прямой на плоскости	59

3.2.7. Пучок прямых на плоскости	61
3.3. Плоскость	63
3.3.1. Уравнения плоскости. Векторно-параметрическое, параметрическое, общее уравнения. Уравнение плоскости по точке и двум направляющим векторам	63
3.3.2. Уравнение плоскости в отрезках	65
3.3.3. Взаимное расположение двух плоскостей	67
3.3.4. Нормальное уравнение плоскости	67
3.3.5. Пучок и связка плоскостей	70
3.3.6. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью	71
Глава 4. Линии и поверхности второго порядка	73
4.1. Эллипс	73
4.1.1. Вывод канонического уравнения эллипса	73
4.1.2. Исследование формы эллипса	75
4.2. Гипербола	77
4.2.1. Вывод канонического уравнения гиперболы	77
4.2.2. Исследование формы гиперболы	78
4.3. Эксцентриситет и директрисы эллипса, гиперболы	80
4.4. Парабола	82
4.4.1. Вывод канонического уравнения	82
4.4.2. Исследование формы параболы	84
4.5. Касательные к эллипсу, гиперболе, параболе	85
4.6. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы	88
4.7. Общее уравнение линий второго порядка	90
4.8. Поверхности второго порядка	94
Глава 5. Комплексные числа	103
5.1. Построение множества комплексных чисел	103
5.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа	105
5.3. Тригонометрическая и экспоненциальная формы записи комплексных чисел	107
5.4. Извлечение корней из комплексных чисел	111
5.5. Корни из единицы	112
Глава 6. Группа. Кольцо. Поле	114
6.1. Декартово произведение множеств	114
6.2. Бинарное отношение	114
6.3. Отображения	115
6.4. Алгебраическая операция	117
6.5. Группа	119
6.6. Кольцо	122
6.7. Поле	124
Глава 7. Многочлены	127
7.1. Определение многочлена	127
7.2. Действия над многочленами	128

7.3. Деление с остатком	130
7.4. Делимость многочленов	133
7.5. Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида	134
7.6. Взаимно простые многочлены	138
7.7. Корни многочленов	139
7.8. Схема Горнера	140
7.9. Кратные корни многочленов	141
7.10. Основная теорема алгебры	142
7.11. Следствия из основной теоремы алгебры для многочленов с комплексными коэффициентами	143
7.12. Следствия из основной теоремы алгебры для многочленов с действительными коэффициентами	146
7.13. Неприводимые многочлены	147
7.14. Рациональные функции	149
Глава 8. Матрицы и определители	154
8.1. Определение матрицы. Частные виды матриц	154
8.2. Линейные операции над матрицами	158
8.3. Умножение матриц	159
8.4. Элементарные преобразования матриц	164
8.5. Транспонирование матриц	164
8.6. Перестановки	166
8.7. Определитель и его свойства	168
8.8. Миноры и алгебраические дополнения	175
8.9. Теорема Лапласа	176
8.10. Определитель произведения матриц	178
8.11. Обратная матрица	180
Глава 9. Системы линейных уравнений	183
9.1. Определения. Основные понятия	183
9.2. Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера	187
9.3. Метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса)	189
Глава 10. Векторные пространства	193
10.1. Определение. Примеры. Простейшие свойства	193
10.2. Эквивалентные системы векторов	195
10.3. Линейная зависимость и независимость векторов	197
10.4. Базис и ранг системы векторов	199
10.5. Базис и размерность пространств	202
10.6. Подпространства	206
10.7. Сумма и пересечение подпространств	207
10.8. Координаты вектора	212
Глава 11. Ранг матрицы	216
11.1. Определение ранга матрицы	216
11.2. Теорема о ранге матрицы и следствия из нее	216
11.3. Элементарные преобразования матрицы и ее ранг	220
11.4. Линейная зависимость, независимость векторов и ранг матрицы	223

Глава 12. Преобразования координат	225
Глава 13. Теория систем линейных уравнений	228
13.1. Критерий совместности	228
13.2. Однородные системы	231
13.3. Связь между решениями неоднородной и приведенной однородной систем уравнений	235
Глава 14. Линейные отображения векторных пространств	238
14.1. Определение. Примеры	238
14.2. Свойства линейных отображений	238
14.3. Изоморфизм векторных пространств	241
Глава 15. Линейные преобразования векторных пространств	245
15.1. Определение и примеры	245
15.2. Матрица линейного преобразования	245
15.3. Действия над линейными преобразованиями	248
15.4. Связь между матрицами линейного преобразования	250
15.5. Подобные матрицы	252
15.6. Ранг и дефект линейного преобразования	254
15.7. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования	256
15.8. Характеристическая матрица. Характеристический многочлен	260
15.9. Подпространство собственных векторов	262
15.10. Присоединенные векторы и жорданов базис	265
15.11. Инвариантные подпространства	267
Глава 16. Полиномиальные матрицы (λ-матрицы)	272
16.1. Эквивалентные λ -матрицы. Канонические λ -матрицы	272
16.2. Система наибольших общих делителей миноров	276
16.3. Система элементарных делителей	279
16.4. Унимодулярные матрицы	283
16.5. Критерий подобия матриц	285
16.6. Минимальный многочлен матрицы	290
Глава 17. Нормальные формы матриц	295
17.1. Жорданова нормальная форма матрицы	295
17.2. Нормальная форма Фробениуса	301
Глава 18. Билинейные отображения и билинейные формы	305
Глава 19. Квадратичные формы	308
19.1. Основные определения и понятия	308
19.2. Эквивалентность квадратичных форм	309
19.3. Нормальный вид комплексных квадратичных форм	314
19.4. Нормальный вид действительных квадратичных форм	316
19.5. Знакоопределенные квадратичные формы	320

Глава 20. Евклидово пространство	326
20.1. Определение и свойства скалярного произведения	326
20.2. Длина вектора. Основные неравенства	328
20.3. Ортогональные векторы	330
20.4. Матрица Грама и матрица скалярного произведения	333
20.5. Ортогональное дополнение подпространства	336
20.6. Ортогональные матрицы	338
20.7. Изометрические преобразования	340
20.8. Симметрические преобразования	342
20.9. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду при помощи ортогонального преобразования	345
Глава 21. Унитарное пространство	350
21.1. Определение и свойства скалярного произведения	350
21.2. Основные положения и утверждения в унитарных пространствах	351
Глава 22. Векторные и матричные нормы	354
22.1. Векторные нормы	354
22.2. Матричные нормы	356
22.3. Связь между векторными и матричными нормами	358
Глава 23. Псевдообратная матрица. Нормальное псевдорешение	363
23.1. Определение псевдообратной матрицы и ее свойства	363
23.2. Применение псевдообратной матрицы к решению матричных уравнений	367
23.3. Нормальное псевдорешение	368
Глава 24. Элементы теории чисел, шифрования и кодирования	371
24.1. Делимость целых чисел	371
24.2. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное	372
24.3. Взаимно простые числа. Функция Эйлера	376
24.4. Сравнения	377
24.5. Первообразные корни. Индексы	380
24.6. Криптографические системы с открытым ключом	381
24.7. Помехоустойчивое кодирование	386
Предметный указатель	391
Список рекомендуемой литературы	400