

# Математические алгоритмы для программистов

3D-графика, машинное обучение  
и моделирование на Python

Пол Орланд



Санкт-Петербург • Москва • Минск

2023

# Краткое содержание

---

Предисловие . . . . .	20
Благодарности . . . . .	25
Об этой книге. . . . .	27
Об авторе . . . . .	32
Иллюстрация на обложке . . . . .	33
<b>Глава 1.</b> Математика в программном коде. . . . .	34

## **Часть I Векторы и графика**

<b>Глава 2.</b> Рисование с помощью двухмерных векторов . . . . .	57
<b>Глава 3.</b> Выход в трехмерный мир. . . . .	111
<b>Глава 4.</b> Преобразование векторов и графики . . . . .	164
<b>Глава 5.</b> Вычисление преобразований с помощью матриц. . . . .	203
<b>Глава 6.</b> Обобщение до высших размерностей . . . . .	257
<b>Глава 7.</b> Решение систем линейных уравнений . . . . .	316

## **Часть II Математический анализ и моделирование физического мира**

<b>Глава 8.</b> Скорость изменения. . . . .	367
<b>Глава 9.</b> Моделирование перемещающихся объектов. . . . .	405
<b>Глава 10.</b> Работа с символьными выражениями . . . . .	425
<b>Глава 11.</b> Моделирование силовых полей . . . . .	468

<b>Глава 12.</b> Оптимизация физической системы . . . . .	501
<b>Глава 13.</b> Анализ звуковых волн с использованием рядов Фурье . . . . .	547

**Часть III**  
**Машинное обучение**

<b>Глава 14.</b> Подгонка функций под данные . . . . .	589
<b>Глава 15.</b> Классификация данных и логистическая регрессия . . . . .	621
<b>Глава 16.</b> Обучение нейронных сетей. . . . .	660
<b>Приложение А.</b> Подготовка к работе с Python . . . . .	697
<b>Приложение Б.</b> Советы и рекомендации по работе с Python . . . . .	710
<b>Приложение В.</b> Загрузка и отображение трехмерных моделей с помощью OpenGL и PyGame . . . . .	742

# Оглавление

---

Предисловие . . . . .	20
Как создавалась эта книга . . . . .	21
Охватываемые математические идеи . . . . .	23
Благодарности . . . . .	25
Об этой книге . . . . .	27
Кому адресована книга . . . . .	27
Структура издания . . . . .	28
О примерах кода . . . . .	29
От издательства . . . . .	31
Об авторе . . . . .	32
Иллюстрация на обложке . . . . .	33
<b>Глава 1. Математика в программном коде . . . . .</b>	<b>34</b>
1.1. Решение финансовых задач с помощью математики и программного обеспечения . . . . .	35
1.1.1. Прогнозирование движения финансового рынка . . . . .	36
1.1.2. Поиск выгодной сделки . . . . .	38
1.1.3. Трехмерная графика и анимация . . . . .	41
1.1.4. Моделирование физического мира . . . . .	43
1.2. Как не надо учить математику . . . . .	46
1.2.1. Джейн решила подучить математику . . . . .	46
1.2.2. Кропотливое изучение учебников по математике . . . . .	48
1.3. Использование натренированного левого полушария . . . . .	49
1.3.1. Использование формального языка . . . . .	49
1.3.2. Создайте свой калькулятор . . . . .	50
1.3.3. Создание абстракций с помощью функций . . . . .	52
Краткие итоги главы . . . . .	54

## Часть I

### Векторы и графика

<b>Глава 2.</b>	Рисование с помощью двухмерных векторов . . . . .	57
2.1.	Изображение двухмерных векторов . . . . .	58
2.1.1.	Представление двухмерных векторов . . . . .	60
2.1.2.	Рисование двухмерных изображений на Python . . . . .	62
2.1.3.	Упражнения . . . . .	65
2.2.	Арифметика двухмерных векторов . . . . .	68
2.2.1.	Компоненты вектора и его длина . . . . .	70
2.2.2.	Умножение вектора на число . . . . .	72
2.2.3.	Вычитание, смещение и расстояние . . . . .	73
2.2.4.	Упражнения . . . . .	75
2.3.	Углы и тригонометрия на плоскости . . . . .	85
2.3.1.	От углов к компонентам . . . . .	86
2.3.2.	Рadiany и тригонометрия в Python . . . . .	91
2.3.3.	От компонентов к углам . . . . .	92
2.3.4.	Упражнения . . . . .	95
2.4.	Преобразование наборов векторов . . . . .	104
2.4.1.	Комбинирование векторных преобразований . . . . .	105
2.4.2.	Упражнения . . . . .	107
2.5.	Рисование с помощью Matplotlib . . . . .	109
	Краткие итоги главы . . . . .	110
<b>Глава 3.</b>	Выход в трехмерный мир . . . . .	111
3.1.	Отображение векторов в трехмерном пространстве . . . . .	113
3.1.1.	Представление трехмерных векторов с помощью координат . . . . .	115
3.1.2.	Рисование трехмерных изображений с помощью Python . . . . .	117
3.1.3.	Упражнения . . . . .	120
3.2.	Арифметика трехмерных векторов . . . . .	121
3.2.1.	Сложение трехмерных векторов . . . . .	121
3.2.2.	Умножение трехмерных векторов на скаляр . . . . .	123
3.2.3.	Вычитание трехмерных векторов . . . . .	124
3.2.4.	Вычисление длин и расстояний . . . . .	124
3.2.5.	Вычисление углов и направлений . . . . .	126
3.2.6.	Упражнения . . . . .	127
3.3.	Скалярное произведение векторов: мера сонаправленности векторов . . . . .	132
3.3.1.	Изображение скалярного произведения . . . . .	132
3.3.2.	Вычисление скалярного произведения . . . . .	135
3.3.3.	Примеры скалярных произведений . . . . .	137

3.3.4. Измерение углов с помощью скалярного произведения . . . . .	138
3.3.5. Упражнения. . . . .	140
3.4. Векторное произведение: мера ориентированной площади . . . . .	144
3.4.1. Ориентация в трехмерном пространстве . . . . .	144
3.4.2. Определение направления с помощью векторного произведения. . . . .	147
3.4.3. Определение длины векторного произведения . . . . .	149
3.4.4. Вычисление векторного произведения трехмерных векторов. . .	151
3.4.5. Упражнения. . . . .	152
3.5. Отображение трехмерного объекта на двумерной плоскости . . . . .	157
3.5.1. Определение трехмерного объекта с помощью векторов . . . . .	157
3.5.2. Проецирование на двумерную плоскость. . . . .	159
3.5.3. Ориентация лицевой стороны и затенение . . . . .	160
3.5.4. Упражнения. . . . .	162
Краткие итоги главы . . . . .	163
<b>Глава 4. Преобразование векторов и графики . . . . .</b>	<b>164</b>
4.1. Преобразование трехмерных объектов . . . . .	167
4.1.1. Рисование преобразованного объекта. . . . .	167
4.1.2. Комбинирование векторных преобразований. . . . .	169
4.1.3. Поворот объекта вокруг оси . . . . .	172
4.1.4. Изобретение своих геометрических преобразований . . . . .	175
4.1.5. Упражнения. . . . .	177
4.2. Линейные преобразования. . . . .	182
4.2.1. Сохраняющая векторная арифметика. . . . .	182
4.2.2. Изображение линейных преобразований . . . . .	184
4.2.3. Полезные свойства линейных преобразований . . . . .	186
4.2.4. Вычисление результатов линейных преобразований . . . . .	191
4.2.5. Упражнения. . . . .	194
Краткие итоги главы . . . . .	201
<b>Глава 5. Вычисление преобразований с помощью матриц. . . . .</b>	<b>203</b>
5.1. Представление линейных преобразований в виде матриц . . . . .	204
5.1.1. Запись векторов и линейных преобразований в виде матриц . . .	205
5.1.2. Умножение матрицы на вектор. . . . .	206
5.1.3. Объединение линейных преобразований путем умножения матриц . . . . .	208
5.1.4. Реализация умножения матриц. . . . .	211
5.1.5. Анимация в трехмерном пространстве с помощью матричных преобразований. . . . .	212
5.1.6. Упражнения. . . . .	214

5.2. Интерпретация матриц разной формы . . . . .	221
5.2.1. Векторы-столбцы как матрицы . . . . .	222
5.2.2. Какие пары матриц можно перемножить? . . . . .	224
5.2.3. Квадратные и прямоугольные матрицы как векторные функции . . . . .	226
5.2.4. Проекция как линейное отображение трехмерного объекта на двухмерную плоскость . . . . .	228
5.2.5. Составление линейных отображений . . . . .	231
5.2.6. Упражнения . . . . .	233
5.3. Параллельный перенос векторов с помощью матриц . . . . .	239
5.3.1. Придание линейности параллельному переносу . . . . .	240
5.3.2. Поиск трехмерной матрицы для двухмерного параллельного переноса . . . . .	243
5.3.3. Комбинирование параллельного переноса с другими линейными преобразованиями . . . . .	244
5.3.4. Параллельный перенос трехмерных объектов в четырехмерном мире . . . . .	246
5.3.5. Упражнения . . . . .	250
Краткие итоги главы . . . . .	255
<b>Глава 6.</b> Обобщение до высших размерностей . . . . .	257
6.1. Обобщение определения векторов . . . . .	258
6.1.1. Создание класса векторов с двумя координатами . . . . .	259
6.1.2. Усовершенствование класса Vec2 . . . . .	261
6.1.3. Повторение процесса для трехмерных векторов . . . . .	262
6.1.4. Конструирование базового класса векторов . . . . .	263
6.1.5. Определение векторных пространств . . . . .	265
6.1.6. Модульное тестирование классов векторных пространств. . . . .	267
6.1.7. Упражнения . . . . .	270
6.2. Исследование различных векторных пространств . . . . .	274
6.2.1. Перечисление всех пространств координатных векторов . . . . .	274
6.2.2. Идентификация векторных пространств в «дикой природе» . . . . .	276
6.2.3. Интерпретация функций как векторов . . . . .	279
6.2.4. Интерпретация матриц как векторов . . . . .	281
6.2.5. Обработка изображений с помощью векторных операций . . . . .	283
6.2.6. Упражнения . . . . .	286
6.3. Поиск меньших векторных пространств . . . . .	294
6.3.1. Идентификация подпространств . . . . .	295
6.3.2. Начнем с единственного вектора . . . . .	297
6.3.3. Охват большего пространства . . . . .	297
6.3.4. Определение размерности . . . . .	300

6.3.5. Определение подпространств векторного пространства функций . . . . .	301
6.3.6. Подпространства изображений . . . . .	303
6.3.7. Упражнения . . . . .	307
Краткие итоги главы . . . . .	314
<b>Глава 7. Решение систем линейных уравнений . . . . .</b>	<b>316</b>
7.1. Разработка аркадной игры . . . . .	318
7.1.1. Моделирование игры . . . . .	318
7.1.2. Отображение игрового поля . . . . .	319
7.1.3. Стрельба из лазерной пушки . . . . .	321
7.1.4. Упражнения . . . . .	322
7.2. Определение точек пересечения линий . . . . .	323
7.2.1. Выбор правильной формулы прямой . . . . .	323
7.2.2. Поиск стандартной формы уравнения прямой . . . . .	325
7.2.3. Линейные уравнения в матричной записи . . . . .	328
7.2.4. Решение линейных уравнений с помощью NumPy . . . . .	330
7.2.5. Определение факта попадания в астероид . . . . .	331
7.2.6. Определение систем без решения . . . . .	333
7.2.7. Упражнения . . . . .	335
7.3. Обобщение линейных уравнений на большее число измерений . . . . .	341
7.3.1. Представление плоскостей в трех измерениях . . . . .	341
7.3.2. Решение систем трех линейных уравнений . . . . .	343
7.3.3. Алгебраическое изучение гиперплоскостей . . . . .	345
7.3.4. Подсчет числа измерений, уравнений и решений . . . . .	347
7.3.5. Упражнения . . . . .	349
7.4. Изменение базиса путем решения линейных уравнений . . . . .	358
7.4.1. Решение трехмерного примера . . . . .	361
7.4.2. Упражнения . . . . .	362
Краткие итоги главы . . . . .	363

## Часть II

### Математический анализ и моделирование физического мира

<b>Глава 8. Скорость изменения . . . . .</b>	<b>367</b>
8.1. Вычисление среднего расхода по объему . . . . .	369
8.1.1. Реализация функции <code>average_flow_rate</code> . . . . .	370
8.1.2. Изображение среднего расхода секущей прямой . . . . .	371
8.1.3. Отрицательные скорости изменения . . . . .	372
8.1.4. Упражнения . . . . .	374



8.2. График зависимости средней скорости от времени . . . . .	375
8.2.1. Определение среднего расхода в разные промежутки времени . . . . .	376
8.2.2. График интервальных расходов . . . . .	377
8.2.3. Упражнения . . . . .	379
8.3. Аппроксимация значений мгновенного расхода . . . . .	380
8.3.1. Определение наклона секущих прямых на коротких интервалах . . . . .	381
8.3.2. Построение функции мгновенного расхода . . . . .	384
8.3.3. Каррирование и построение графика функции мгновенного расхода . . . . .	386
8.3.4. Упражнения . . . . .	388
8.4. Аппроксимация изменения объема . . . . .	389
8.4.1. Вычисление изменения объема за короткий промежуток времени . . . . .	390
8.4.2. Разбиение временного отрезка на мелкие интервалы . . . . .	391
8.4.3. Изображение изменения объема на графике расхода . . . . .	392
8.4.4. Упражнения . . . . .	395
8.5. График изменения объема с течением времени . . . . .	395
8.5.1. Вычисление объема в заданный момент времени . . . . .	396
8.5.2. Представление сумм Римана для функции объема . . . . .	397
8.5.3. Улучшение аппроксимации . . . . .	400
8.5.4. Определенные и неопределенные интегралы . . . . .	402
Краткие итоги главы . . . . .	404
<b>Глава 9. Моделирование перемещающихся объектов.</b> . . . . .	<b>405</b>
9.1. Имитация движения с постоянной скоростью . . . . .	406
9.1.1. Добавление в астероиды информации о скоростях . . . . .	407
9.1.2. Добавление поддержки перемещения астероидов в игровой движок . . . . .	407
9.1.3. Удержание астероидов в пределах экрана . . . . .	408
9.1.4. Упражнения . . . . .	410
9.2. Моделирование ускорения. . . . .	411
9.2.1. Ускоренное движение космического корабля. . . . .	411
9.3. Более глубокое погружение в метод Эйлера. . . . .	413
9.3.1. Вычисления методом Эйлера вручную . . . . .	413
9.3.2. Реализация алгоритма на Python. . . . .	415
9.4. Применение метода Эйлера с уменьшенным временным шагом . . . . .	417
9.4.1. Упражнения . . . . .	419
Краткие итоги главы . . . . .	424

<b>Глава 10.</b> Работа с символьными выражениями . . . . .	425
10.1. Поиск точной производной с помощью системы компьютерной алгебры . . . . .	426
10.1.1. Выполнение символьных операций на Python . . . . .	428
10.2. Моделирование алгебраических выражений. . . . .	429
10.2.1. Разбиение выражения на части . . . . .	430
10.2.2. Конструирование дерева выражения . . . . .	431
10.2.3. Представление дерева выражений на Python . . . . .	432
10.2.4. Упражнения . . . . .	435
10.3. Практическое применение символьных выражений . . . . .	438
10.3.1. Поиск всех переменных в выражении . . . . .	438
10.3.2. Вычисление выражения. . . . .	440
10.3.3. Разложение выражения. . . . .	443
10.3.4. Упражнения . . . . .	446
10.4. Поиск производной функции . . . . .	448
10.4.1. Производные степеней . . . . .	448
10.4.2. Производные преобразованных функций . . . . .	450
10.4.3. Производные некоторых специальных функций . . . . .	452
10.4.4. Производные произведений и сложных функций . . . . .	453
10.4.5. Упражнения . . . . .	454
10.5. Автоматическое взятие производной . . . . .	457
10.5.1. Реализация метода вычисления производной для выражений. . . . .	457
10.5.2. Реализация правила произведения и цепного правила . . . . .	459
10.5.3. Реализация степенного правила . . . . .	460
10.5.4. Упражнения . . . . .	462
10.6. Символьное интегрирование функций . . . . .	463
10.6.1. Интегралы как первообразные . . . . .	463
10.6.2. Введение в библиотеку SymPy . . . . .	464
10.6.3. Упражнения . . . . .	465
Краткие итоги главы . . . . .	467
<b>Глава 11.</b> Моделирование силовых полей . . . . .	468
11.1. Моделирование гравитации с помощью векторного поля. . . . .	469
11.1.1. Моделирование гравитации с помощью функции потенциальной энергии . . . . .	470
11.2. Моделирование гравитационных полей. . . . .	473
11.2.1. Определение векторного поля. . . . .	473
11.2.2. Определение простого силового поля . . . . .	475
11.3. Добавление гравитации в игру с астероидами . . . . .	476

## 14 Оглавление

11.3.1. Реализация воздействия гравитации на игровые объекты . . . . .	478
11.3.2. Упражнения . . . . .	481
11.4. Потенциальная энергия . . . . .	482
11.4.1. Определение скалярного поля потенциальной энергии . . . . .	483
11.4.2. Представление скалярного поля в виде тепловой карты . . . . .	486
11.4.3. Представление скалярного поля в виде карты рельефа . . . . .	486
11.5. Связь энергии и сил с градиентом . . . . .	487
11.5.1. Измерение крутизны с помощью поперечных сечений . . . . .	488
11.5.2. Расчет частных производных . . . . .	490
11.5.3. Определение крутизны графика с использованием градиента . . . . .	492
11.5.4. Расчет силовых полей на основе потенциальной энергии с градиентом . . . . .	494
11.5.5. Упражнения . . . . .	497
Краткие итоги главы . . . . .	500
<b>Глава 12. Оптимизация физической системы . . . . .</b>	<b>501</b>
12.1. Тестирование модели ядра . . . . .	504
12.1.1. Моделирование с помощью метода Эйлера . . . . .	505
12.1.2. Измерение характеристик траектории . . . . .	506
12.1.3. Исследование различных углов выстрела . . . . .	507
12.1.4. Упражнения . . . . .	508
12.2. Вычисление оптимальной дальности . . . . .	512
12.2.1. Определение дальности в зависимости от угла выстрела . . . . .	512
12.2.2. Решение для вычисления максимальной дальности . . . . .	515
12.2.3. Идентификация максимумов и минимумов . . . . .	517
12.2.4. Упражнения . . . . .	519
12.3. Усовершенствование модели . . . . .	521
12.3.1. Добавление еще одного измерения . . . . .	522
12.3.2. Моделирование рельефа местности вокруг пушки . . . . .	523
12.3.3. Решение для вычисления дальности стрельбы в трехмерном пространстве . . . . .	525
12.3.4. Упражнения . . . . .	528
12.4. Оптимизация дальности с помощью градиентного восхождения . . . . .	531
12.4.1. График зависимости дальности от параметров стрельбы . . . . .	531
12.4.2. Градиент функции дальности . . . . .	532
12.4.3. Поиск направления подъема в гору с помощью градиента . . . . .	534
12.4.4. Реализация градиентного восхождения . . . . .	536
12.4.5. Упражнения . . . . .	540
Краткие итоги главы . . . . .	545

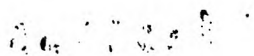
<b>Глава 13.</b> Анализ звуковых волн с использованием рядов Фурье . . . . .	547
13.1. Объединение звуковых волн и их разложение. . . . .	549
13.2. Воспроизведение звуковых волн в Python . . . . .	551
13.2.1. Воспроизведение первого звука. . . . .	551
13.2.2. Воспроизведение музыкальной ноты . . . . .	555
13.2.3. Упражнения . . . . .	557
13.3. Преобразование синусоидальной волны в звук . . . . .	557
13.3.1. Создание звука на основе синусоидальных функций . . . . .	558
13.3.2. Изменение частоты синусоиды . . . . .	559
13.3.3. Выборка и воспроизведение звуковой волны . . . . .	562
13.3.4. Упражнения . . . . .	563
13.4. Объединение звуковых волн. . . . .	565
13.4.1. Сложение выборок звуковых волн для получения аккорда . . . . .	565
13.4.2. Изображение графика суммы двух звуковых волн . . . . .	566
13.4.3. Построение линейной комбинации синусоид . . . . .	568
13.4.4. Построение знакомых функций с помощью синусоид. . . . .	570
13.4.5. Упражнения . . . . .	573
13.5. Разложение звуковой волны в ряд Фурье . . . . .	573
13.5.1. Поиск компонент вектора с помощью внутреннего произведения . . . . .	575
13.5.2. Определение внутреннего произведения периодических функций. . . . .	576
13.5.3. Определение функции для поиска коэффициентов Фурье. . . . .	579
13.5.4. Поиск коэффициентов Фурье для прямоугольной волны. . . . .	580
13.5.5. Коэффициенты Фурье для других волнообразных функций . . . . .	581
13.5.6. Упражнения . . . . .	583
Краткие итоги главы . . . . .	585

## Часть III

### Машинное обучение

<b>Глава 14.</b> Подгонка функций под данные . . . . .	589
14.1. Измерение качества соответствия функции . . . . .	593
14.1.1. Измерение отклонения функции . . . . .	593
14.1.2. Суммирование квадратов ошибок . . . . .	596
14.1.3. Вычисление потерь для функций цены автомобиля . . . . .	598
14.1.4. Упражнения . . . . .	601
14.2. Исследование пространств функций. . . . .	603
14.2.1. График функции потерь для прямых, проходящих через начало координат . . . . .	604

14.2.2. Пространство всех линейных функций . . . . .	606
14.2.3. Упражнения . . . . .	607
14.3. Поиск прямой наилучшего соответствия с помощью градиентного спуска . . . . .	608
14.3.1. Изменение масштаба данных . . . . .	608
14.3.2. Поиск и построение линии наилучшего соответствия . . . . .	609
14.3.3. Упражнения . . . . .	611
14.4. Подбор нелинейной функции . . . . .	612
14.4.1. Особенности поведения экспоненциальных функций . . . . .	613
14.4.2. Нахождение экспоненциальной функции наилучшего соответствия . . . . .	615
14.4.3. Упражнения . . . . .	617
Краткие итоги главы . . . . .	620
<b>Глава 15. Классификация данных и логистическая регрессия . . . . .</b>	<b>621</b>
15.1. Оценка функции классификации на реальных данных . . . . .	623
15.1.1. Загрузка данных об автомобилях . . . . .	624
15.1.2. Оценка функции классификации . . . . .	625
15.1.3. Упражнения . . . . .	626
15.2. Изображение границ решения . . . . .	627
15.2.1. Изображение пространства автомобилей . . . . .	628
15.2.2. Определение лучшей границы решения . . . . .	629
15.2.3. Реализация функции классификации . . . . .	631
15.2.4. Упражнение . . . . .	632
15.3. Классификация как задача регрессии . . . . .	633
15.3.1. Масштабирование исходных данных об автомобилях . . . . .	634
15.3.2. Оценка схожести автомобиля на BMW . . . . .	635
15.3.3. Знакомство с сигмоидной функцией . . . . .	637
15.3.4. Комбинирование сигмоидной функции с другими функциями . . . . .	638
15.3.5. Упражнения . . . . .	642
15.4. Исследование пространства возможных логистических функций . . . . .	643
15.4.1. Параметризация логистических функций . . . . .	644
15.4.2. Оценка качества соответствия логистической функции . . . . .	645
15.4.3. Тестирование разных логистических функций . . . . .	647
15.4.4. Упражнения . . . . .	648
15.5. Поиск лучшей логистической функции . . . . .	651
15.5.1. Градиентный спуск в трех измерениях . . . . .	651
15.5.2. Использование градиентного спуска для поиска наилучшего соответствия . . . . .	652



15.5.3. Оценка лучшего логистического классификатора . . . . .	654
15.5.4. Упражнения . . . . .	656
Краткие итоги главы . . . . .	658
<b>Глава 16. Обучение нейронных сетей. . . . .</b>	<b>660</b>
16.1. Классификация данных с помощью нейронных сетей. . . . .	662
16.2. Классификация изображений рукописных цифр . . . . .	664
16.2.1. Построение 64-мерных векторов изображения . . . . .	664
16.2.2. Построение случайного классификатора цифр . . . . .	666
16.2.3. Оценка характеристик классификатора цифр. . . . .	667
16.2.4. Упражнения . . . . .	668
16.3. Проектирование нейронной сети . . . . .	670
16.3.1. Организация нейронов и связей между ними . . . . .	670
16.3.2. Поток данных через нейронную сеть. . . . .	671
16.3.3. Вычисление активаций . . . . .	674
16.3.4. Вычисление активаций в матричной записи. . . . .	676
16.3.5. Упражнения . . . . .	678
16.4. Создание нейронной сети на Python . . . . .	680
16.4.1. Реализация класса MLP на Python. . . . .	680
16.4.2. Вычисления в MLP . . . . .	683
16.4.3. Проверка качества классификации моделью MLP. . . . .	684
16.4.4. Упражнения . . . . .	684
16.5. Обучение нейронной сети с помощью градиентного спуска . . . . .	685
16.5.1. Обучение как задача минимизации . . . . .	685
16.5.2. Вычисление градиентов с обратным распространением . . . . .	687
16.5.3. Автоматическое обучение с помощью scikit-learn. . . . .	687
16.5.4. Упражнения . . . . .	689
16.6. Расчет градиентов в ходе обратного распространения. . . . .	692
16.6.1. Вычисление потерь в терминах весов последнего слоя . . . . .	692
16.6.2. Вычисление частных производных для весов последнего слоя с помощью цепного правила . . . . .	693
16.6.3. Упражнения . . . . .	695
Краткие итоги главы . . . . .	695
<b>Приложение А. Подготовка к работе с Python. . . . .</b>	<b>697</b>
А.1. Проверка наличия Python в системе . . . . .	697
А.2. Загрузка и установка Anaconda. . . . .	698
А.3. Применение Python в интерактивном режиме . . . . .	700
А.3.1. Создание и запуск файла сценария на Python . . . . .	701
А.3.2. Использование блокнотов Jupyter. . . . .	704



<b>Приложение Б. Советы и рекомендации по работе с Python</b> . . . . .	710
Б.1. Числа и математика в Python . . . . .	710
Б.1.1. Модуль math . . . . .	711
Б.1.2. Случайные числа . . . . .	712
Б.2. Наборы данных в Python. . . . .	713
Б.2.1. Списки . . . . .	713
Б.2.2. Другие итерируемые объекты . . . . .	717
Б.2.3. Функции-генераторы. . . . .	718
Б.2.4. Кортежи . . . . .	719
Б.2.5. Множества . . . . .	720
Б.2.6. Массивы NumPy. . . . .	721
Б.2.7. Словари . . . . .	722
Б.2.8. Полезные функции для работы с наборами данных. . . . .	723
Б.3. Работа с функциями . . . . .	723
Б.3.1. Передача функциям нескольких входных данных. . . . .	724
Б.3.2. Именованные аргументы . . . . .	725
Б.3.3. Функции как данные . . . . .	726
Б.3.4. Лямбда-выражения: анонимные функции. . . . .	728
Б.3.5. Применение функций к массивам NumPy. . . . .	729
Б.4. Данные с плавающей точкой и Matplotlib . . . . .	730
Б.4.1. Создание диаграммы рассеяния . . . . .	730
Б.4.2. Создание линейной диаграммы . . . . .	731
Б.4.3. Дополнительные настройки диаграмм . . . . .	732
Б.5. Объектно-ориентированное программирование на Python . . . . .	734
Б.5.1. Определение классов . . . . .	734
Б.5.2. Определение методов. . . . .	735
Б.5.3. Специальные методы . . . . .	736
Б.5.4. Перегрузка операторов. . . . .	737
Б.5.5. Методы класса . . . . .	738
Б.5.6. Наследование и абстрактные классы . . . . .	739
<b>Приложение В. Загрузка и отображение трехмерных моделей</b> с помощью OpenGL и PyGame . . . . .	742
В.1. Воссоздание октаэдра из главы 3. . . . .	742
В.2. Изменение точки зрения. . . . .	746
В.3. Загрузка и отображение чайника из Юты . . . . .	748
В.4. Упражнения. . . . .	750