

Марк Питер Дайзенрот,
А. Альдо Фейзал, Чен Сунь Он

Математика в машинном обучении

Докопайся до сути



Санкт-Петербург • Москва • Минск

2024

Краткое содержание

Математика в машинном обучении	15
Условные обозначения	17
Предисловие	20
Благодарности	24

ЧАСТЬ I

Математические основы

Глава 1. Введение и мотивация	28
Глава 2. Линейная алгебра	35
Глава 3. Аналитическая геометрия	100
Глава 4. Матричные разложения	134
Глава 5. Векторный анализ	185
Глава 6. Вероятность и распределения	225
Глава 7. Непрерывная оптимизация	287

ЧАСТЬ II

Главные задачи машинного обучения

Глава 8. О сочетании модели и данных	318
Глава 9. Линейная регрессия	366
Глава 10. Снижение размерности с помощью анализа главных компонент	400
Глава 11. Оценка плотности с помощью моделей гауссовой смеси	438
Глава 12. Классификация методом опорных векторов	464
Библиография	492

Оглавление

От издательства	14
О научном редакторе русского издания	14
Математика в машинном обучении	15
Условные обозначения	17
Список аббревиатур и сокращений	19
Предисловие	20
Зачем нужна еще одна книга по машинному обучению?	21
Какова целевая аудитория книги?	22
Благодарности	24

ЧАСТЬ I **Математические основы**

Глава 1. Введение и мотивация	28
1.1. Поиск интуитивно понятных формулировок	29
1.2. Два способа читать эту книгу	30
1.3. Упражнения и обратная связь	34
Глава 2. Линейная алгебра	35
2.1. Системы линейных уравнений	38
2.2. Матрицы	41
2.2.1. Сложение и перемножение матриц	42
2.2.2. Обращение и транспонирование	44
2.2.3. Умножение на скаляр	46
2.2.4. Компактное представление системы уравнений	47

2.3. Решение систем линейных уравнений	47
2.3.1. Частное и общее решение	48
2.3.2. Элементарные преобразования	49
2.3.3. Прием $s - 1$	54
2.3.4. Алгоритмы для решения системы линейных уравнений	57
2.4. Векторные пространства	58
2.4.1. Группы	58
2.4.2. Векторные пространства	60
2.4.3. Векторные подпространства	62
2.5. Линейная независимость	63
2.6. Базис и ранг	68
2.6.1. Генерация множества и базиса	69
2.6.2. Ранг	72
2.7. Линейные отображения	73
2.7.1. Матричное представление линейных отображений	75
2.7.2. Изменение базиса	79
2.7.3. Образ и ядро	85
2.8. Аффинные пространства	88
2.8.1. Аффинные подпространства	89
2.8.2. Аффинные отображения	90
2.9. Дополнительное чтение	91
Упражнения	92
Глава 3. Аналитическая геометрия	100
3.1. Нормы	100
3.2. Внутренние произведения	102
3.2.1. Скалярное произведение	103
3.2.2. Общие внутренние произведения	103
3.2.3. Симметричные положительно определенные матрицы	104
3.3. Длины и расстояния	106
3.4. Углы и ортогональность	108
3.5. Ортонормированный базис	111
3.6. Ортогональное дополнение	112
3.7. Внутреннее произведение функций	113

3.8. Ортогональные проекции	114
3.8.1. Проекция на одномерные подпространства (прямые)	116
3.8.2. Проекция на общие подпространства	119
3.8.3. Ортогонализация Грама — Шмидта	124
3.8.4. Проекция на аффинные подпространства	125
3.9. Повороты	126
3.9.1. Повороты в \mathbb{R}^2	127
3.9.2. Повороты в \mathbb{R}^3	128
3.9.3. Поворот в n измерениях	129
3.9.4. Свойства поворотов	130
3.10. Дополнительное чтение	130
Упражнения	131
Глава 4. Матричные разложения	134
4.1. Детерминант и след	136
4.2. Собственные значения и собственные векторы	142
4.2.1. Графическая интуиция в двух измерениях	147
4.3. Разложение Холецкого	154
4.4. Собственное разложение и диагонализация	156
4.4.1. Геометрическая интуиция для собственного разложения	158
4.5. Разложение по сингулярным значениям	160
4.5.1. Геометрические интуиции для SVD	161
4.5.2. Построение SVD	164
4.5.3. Разложение на собственные значения и разложение на сингулярные значения	169
4.6. Матричное приближение	173
4.7. Матричная филогения	178
4.8. Дополнительное чтение	180
Упражнения	182
Глава 5. Векторный анализ	185
5.1. Дифференцирование функций одной переменной	187
5.1.1. Ряд Тейлора	189
5.1.2. Правила дифференцирования	192

5.2. Частные производные и градиенты	193
5.2.1. Основные правила взятия частных производных	195
5.2.2. Цепное правило	196
5.3. Градиенты векторнозначных функций	197
5.4. Градиенты матриц	204
5.5. Полезные тождества для вычисления градиентов	208
5.6. Обратное распространение ошибки и автоматическое дифференцирование	209
5.6.1. Градиенты в глубоких нейронных сетях	210
5.6.2. Автоматическое дифференцирование	211
5.7. Производные высших порядков	215
5.8. Линеаризация и ряды Тейлора для нескольких переменных	216
5.9. Для дальнейшего чтения	222
.. Упражнения	223
Глава 6. Вероятность и распределения	225
6.1. Построение вероятностного пространства	225
6.1.1. Философские вопросы	226
6.1.2. Вероятность и случайные величины	228
6.1.3. Статистика	231
6.2. Дискретные и непрерывные распределения	232
6.2.1. Дискретные вероятности	232
6.2.2. Непрерывные вероятности	234
6.2.3. Различия дискретных и непрерывных распределений	236
6.3. Правило суммы, правило произведения и теорема Байеса	238
6.4. Обобщающие статистики и независимость	241
6.4.1. Среднее и дисперсия	242
6.4.2. Эмпирические среднее и дисперсия	247
6.4.3. Три формулы дисперсии	248
6.4.4. Суммы и преобразования случайных величин	249
6.4.5. Статистическая независимость	250
6.4.6. Скалярные произведения случайных величин	251
6.5. Гауссово распределение	254
6.5.1. Частные и условные распределения — тоже гауссианы	255

6.5.2. Произведение гауссовых плотностей	258
6.5.3. Суммы и линейные преобразования	259
6.5.4. Семплирование из многомерного гауссова распределения	262
6.6. Сопряженность и экспоненциальное семейство распределений	263
6.6.1. Сопряженность	266
6.6.2. Достаточные статистики	269
6.6.3. Экспоненциальное семейство распределений	270
6.7. Замена переменных / Обратное преобразование	274
6.7.1. Метод функций распределения	275
6.7.2. Замена переменных	277
6.8. Для дальнейшего чтения	282
Упражнения	283
Глава 7. Непрерывная оптимизация	287
7.1. Оптимизация с использованием градиентного спуска	290
7.1.1. Размер шага	293
7.1.2. Градиентный спуск с импульсом	294
7.1.3. Стохастический градиентный спуск	295
7.2. Ограниченная оптимизация и множители Лагранжа	297
7.3. Выпуклая оптимизация	300
7.3.1. Линейное программирование	305
7.3.2. Квадратичное программирование	307
7.3.3. Преобразование Лежандра — Фенхеля и выпуклое сопряжение	308
7.4. Для дальнейшего чтения	313
Упражнения	314

ЧАСТЬ II

Главные задачи машинного обучения

Глава 8. О сочетании модели и данных	318
8.1. Данные, модели и обучение	318
8.1.1. Данные как векторы	319
8.1.2. Модели как функции	323
8.1.3. Модели как вероятностные распределения	324
8.1.4. Обучение — это нахождение параметров	325

8.2. Минимизация эмпирического риска	327
8.2.1. Гипотеза класса функций	328
8.2.2. Функция потерь для обучения	329
8.2.3. Регуляризация для борьбы с переобучением	331
8.2.4. Кросс-валидация для оценки производительности обобщения	333
8.2.5. Дальнейшее чтение	335
8.3. Оценка параметров	336
8.3.1. Метод максимального правдоподобия	336
8.3.2. Оценка апостериорного максимума	339
8.3.3. Обучение модели	341
8.3.4. Дополнительное чтение	344
8.4. Вероятностные модели и инференс	345
8.4.1. Вероятностные модели	345
8.4.2. Байесовский инференс	346
8.4.3. Модели латентных переменных	348
8.4.4. Дальнейшее чтение	350
8.5. Направленные графические модели	351
8.5.1. Семантика графов	352
8.5.2. Условная независимость и d-разбиение	355
8.5.3. Дальнейшее чтение	357
8.6. Выбор модели	358
8.6.1. Вложенная кросс-валидация	358
8.6.2. Выбор байесовской модели	359
8.6.3. Коэффициент Байеса для сравнения моделей	362
8.6.4. Дальнейшее чтение	364
Глава 9. Линейная регрессия	366
9.1. Постановка задачи	368
9.2. Оценка параметров	370
9.2.1. Оценка максимального правдоподобия	371
9.2.2. Переобучение при линейной регрессии	377
9.2.3. Оценка апостериорного максимума	380
9.2.4. MAP-оценивание как регуляризация	382

9.3. Байесовская линейная регрессия	384
9.3.1. Модель	384
9.3.2. Априорные предсказания	385
9.3.3. Апостериорное распределение	387
9.3.4. Апостериорные предсказания	389
9.3.5. Вычисление маргинального правдоподобия	393
9.4. Максимальное правдоподобие как ортогональная проекция	395
9.5. Для дальнейшего чтения	397
Глава 10. Снижение размерности с помощью анализа главных компонент	400
10.1. Постановка проблемы	401
10.2. Перспектива максимальной дисперсии	404
10.2.1. Направление с максимальной дисперсией	405
10.2.2. M-мерное подпространство с максимальной дисперсией	407
10.3. Проекционная перспектива	411
10.3.1. Настройка и цели	411
10.3.2. Поиск оптимальных координат	413
10.3.3. Нахождение базиса главного подпространства	415
10.4. Вычисление собственного вектора и приближения низкого ранга	419
10.4.1. PCA с использованием матричных приближений низкого ранга	420
10.4.2. Практические аспекты	421
10.5. PCA в больших размерах	422
10.6. Ключевые шаги PCA на практике	424
10.7. Латентная переменная	427
10.7.1. Генеративный процесс и вероятностная модель	428
10.7.2. Правдоподобие и совместное распределение	430
10.7.3. Апостериорное распределение	431
10.8. Дополнительное чтение	432
Глава 11. Оценка плотности с помощью моделей гауссовой смеси	438
11.1. Модель гауссовой смеси	440
11.2. Изучение параметров с помощью максимального правдоподобия	440
11.2.1. Ответственность	443
11.2.2. Обновление средних	444

11.2.3. Обновление ковариаций	447
11.2.4. Обновление весов смеси	450
11.3. EM-алгоритм	453
11.4. Скрытая перспектива	456
11.4.1. Генеративный процесс и вероятностная модель	456
11.4.2. Правдоподобие	458
11.4.3. Апостериорное распределение	459
11.4.4. Расширение до полного набора данных	459
11.4.5. Еще раз про EM-алгоритм	461
11.5. Дополнительное чтение	461
Глава 12. Классификация методом опорных векторов	464
12.1. Разделяющие гиперплоскости	466
12.2. Прямая задача метода опорных векторов	468
12.2.1. Понятие зазора	469
12.2.2. Нахождение зазора: традиционный способ	471
12.2.3. Почему можно взять зазор, равный 1	473
12.2.4. SVM с мягким зазором: геометрический подход	474
12.2.5. SVM с мягким зазором: подход с использованием функции потерь	476
12.3. Двойственная задача SVM	479
12.3.1. Двойственность и множители Лагранжа	479
12.3.2. Двойственность и выпуклая оболочка	482
12.4. Ядра	484
12.5. Численное решение	487
12.6. Для дальнейшего чтения	489
Библиография	492