

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Утверждено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебника для студентов
учреждений высшего образования
по математическим специальностям

Минск



«Адукацыя і выхаванне»

2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
-----------------------	----

Часть I. ТЕОРИЯ

Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ	16
1.1. Множество комплексных чисел	16
1.1.1. Операции с комплексными числами	16
1.1.2. Поле комплексных чисел	17
1.1.3. Алгебраическая форма записи	18
1.1.4. Тригонометрическая форма записи	19
1.2. Расширенная комплексная плоскость	20
1.2.1. Топология комплексной плоскости	20
1.2.2. Компактность	23
1.2.3. Связность	24
1.2.4. Стереографическая проекция	24
1.2.5. Сферическая метрика	26
1.3. Предел и непрерывность	27
1.3.1. Функции комплексного переменного	27
1.3.2. Непрерывность	27
1.3.3. Равномерная непрерывность	28
1.4. Кривые и области	29
1.4.1. Кривые и контуры	29
1.4.2. Области	35
1.4.3. Многосвязные области	36
Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ	37
2.1. Комплексное дифференцирование	37
2.1.1. Производная и дифференцируемость	37

2.1.2.	Правила дифференцирования	38
2.1.3.	Условия Коши – Римана	39
2.2.	Аналитические функции и конформные отображения	41
2.2.1.	Геометрический смысл аргумента производной	41
2.2.2.	Геометрический смысл модуля производной	42
2.2.3.	Понятие аналитической функции	42
2.3.	Дробно-линейные отображения	43
2.3.1.	Простейшие свойства	43
2.3.2.	Групповое свойство	45
2.3.3.	Круговое свойство	45
2.3.4.	Свойство симметрии	47
2.3.5.	Свойство трех точек	49
2.3.6.	Примеры дробно-линейных отображений	51
2.3.7.	Функция Жуковского	53
2.4.	Элементарные аналитические функции	55
2.4.1.	Экспоненциальная функция	55
2.4.2.	Тригонометрические и гиперболические функции	56
2.4.3.	Логарифмическая функция	59
2.4.4.	Степенная функция	61
2.4.5.	Обратные функции к тригонометрическим и гиперболическим	62
Глава 3.	ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМА И ФОРМУЛА КОШИ	64
3.1.	Криволинейные интегралы	64
3.1.1.	Комплексные криволинейные интегралы	64
3.1.2.	Свойства криволинейных интегралов	66
3.2.	Интегральная теорема Коши	69
3.2.1.	Интегральная теорема	69
3.2.2.	Обобщение интегральной теоремы Коши	71
3.2.3.	Случай многосвязной области	74
3.2.4.	Первообразная аналитической функции	75
3.3.	Интегральная формула Коши	78
3.3.1.	Интегральная формула	78
3.3.2.	Формула среднего значения и принцип максимума	80
3.3.3.	Формула Шварца	83
3.3.4.	Интеграл типа Коши	84
3.3.5.	Теорема Мореры	87
3.3.6.	Сопряженные гармонические функции	88

Глава 4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ	90
4.1. Ряды Тейлора	90
4.1.1. Основные понятия теории рядов	90
4.1.2. Степенные ряды	92
4.1.3. Радиус сходимости и формула Коши — Адамара	93
4.1.4. Разложение в степенной ряд	95
4.1.5. Эквивалентные описания аналитичности	96
4.2. Теоремы единственности	97
4.2.1. Локальная форма единственности	97
4.2.2. Теорема единственности Вейерштрасса	98
4.3. Последовательности аналитических функций	99
4.3.1. Сходимость внутри области	99
4.3.2. Принцип счетной компактности	99
4.3.3. Теорема Витали	101
4.3.4. Теорема Вейерштрасса	102
Глава 5. Ряды ЛОРАНА	104
5.1. Разложение в ряд Лорана	104
5.1.1. Ряд Лорана	104
5.1.2. Формулы для коэффициентов разложения	105
5.1.3. Неравенства Коши	108
5.2. Классификация изолированных особых точек	108
5.2.1. Правильные точки функции	108
5.2.2. Полюсы	110
5.2.3. Существенно особые точки	112
5.2.4. Случай бесконечно удаленной точки	113
5.2.5. Теорема Сохоцкого	114
5.2.6. Целые и мероморфные функции	115
Глава 6. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ	117
6.1. Вычеты и основная теорема о вычетах	117
6.1.1. Вычеты	117
6.1.2. Формулы для вычисления вычетов	118
6.1.3. Теорема Коши о вычетах	119
6.1.4. Вычет в бесконечно удаленной точке	120
6.1.5. Теорема о полной сумме вычетов	122

6.2. Вычисление интегралов с помощью вычетов	122
6.2.1. Несобственные интегралы	122
6.2.2. Интегралы от произведений $f(x)e^{i\alpha x}$	124
6.2.3. Интегралы от тригонометрических функций	126
6.3. Теорема о логарифмическом вычете и ее приложения	127
6.3.1. Логарифмический вычет	127
6.3.2. Принцип аргумента	129
6.3.3. Теорема Руше	132
6.3.4. Принципы сохранения области	133
Глава 7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА	135
7.1. Аналитическое продолжение	135
7.1.1. Элемент аналитической функции и его продолжение	135
7.1.2. Принцип симметрии Римана – Шварца	140
7.2. Однолистные функции	143
7.2.1. Теорема о числе прообразов	143
7.2.2. Критерий локальной однолистности	144
7.2.3. Особые точки однолистных функций	147
7.2.4. Последовательности однолистных функций	148
7.3. Конформное отображение областей	148
7.3.1. Автоморфизмы основных областей	148
7.3.2. Теорема Римана	150
7.4. Конформные отображения многоугольников	153
7.4.1. Эллиптические интегралы первого рода	153
7.4.2. Эллиптический синус	157
7.4.3. Формула Кристоффеля – Шварца	158

Часть II. ПРАКТИКА

Глава 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА и действия над ними	162
1.1. Задания для аудиторной работы	162
1.2. Базовые индивидуальные задания	169
1.3. Задания для самостоятельной работы	172
1.4. Задания творческого характера	174

Глава 2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ . . .	176
2.1. Задания для аудиторной работы	176
2.2. Базовые индивидуальные задания	180
2.3. Задания для самостоятельной работы	183
2.4. Задания творческого характера	184
Глава 3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО	187
3.1. Задания для аудиторной работы	187
3.2. Базовые индивидуальные задания	194
3.3. Задания для самостоятельной работы	198
3.4. Задания творческого характера	200
Глава 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА ПРОИЗВОДНОЙ	203
4.1. Задания для аудиторной работы	203
4.2. Базовые индивидуальные задания	205
4.3. Задания для самостоятельной работы	208
4.4. Задания творческого характера	209
Глава 5. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ	211
5.1. Задания для аудиторной работы	211
5.2. Базовые индивидуальные задания	216
5.3. Задания для самостоятельной работы	222
5.4. Задания творческого характера	224
Глава 6. ДРОВО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ	225
6.1. Задания для аудиторной работы	225
6.2. Базовые индивидуальные задания	229
6.3. Задания для самостоятельной работы	237
6.4. Задания творческого характера	239

Глава 7. Функция Жуковского	243
7.1. Задания для аудиторной работы	243
7.2. Базовые индивидуальные задания	247
7.3. Задания для самостоятельной работы	249
7.4. Задания творческого характера	250
Глава 8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМА и ФОРМУЛА КОШИ	253
8.1. Задания для аудиторной работы	253
8.2. Базовые индивидуальные задания	263
8.3. Задания для самостоятельной работы	269
8.4. Задания творческого характера	277
Глава 9. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ	279
9.1. Задания для аудиторной работы	279
9.2. Базовые индивидуальные задания	282
9.3. Задания для самостоятельной работы	287
9.4. Задания творческого характера	289
Глава 10. РЯДЫ ТЕЙЛОРА	291
10.1. Задания для аудиторной работы	291
10.2. Базовые индивидуальные задания	294
10.3. Задания для самостоятельной работы	298
10.4. Задания творческого характера	300
Глава 11. НУЛИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ	303
11.1. Задания для аудиторной работы	303
11.2. Базовые индивидуальные задания	306
11.3. Задания для самостоятельной работы	309
11.4. Задания творческого характера	311

Глава 12.Ряд ЛОРАНА	313
12.1.Задания для аудиторной работы	313
12.2.Базовые индивидуальные задания	319
12.3.Задания для самостоятельной работы	324
12.4.Задания творческого характера	327
Глава 13.ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОВЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ	329
13.1.Задания для аудиторной работы	329
13.2.Базовые индивидуальные задания	331
13.3.Задания для самостоятельной работы	335
13.4.Задания творческого характера	337
Глава 14.ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЫЧЕТОВ	341
14.1.Задания для аудиторной работы	341
14.2.Базовые индивидуальные задания	346
14.3.Задания для самостоятельной работы	350
14.4.Задания творческого характера	352
Глава 15.ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ	355
15.1.Задания для аудиторной работы	355
15.2.Базовые индивидуальные задания	361
15.3.Задания для самостоятельной работы	368
15.4.Задания творческого характера	371
Глава 16.ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ И НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ	373
16.1.Задания для аудиторной работы	373
16.2.Базовые индивидуальные задания	377
16.3.Задания для самостоятельной работы	379
16.4.Задания творческого характера	380

Глава 17. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ЛАПЛАСА	383
17.1. Задания для аудиторной работы	383
17.2. Базовые индивидуальные задания	386
17.3. Задания для самостоятельной работы	388
17.4. Задания творческого характера	391
Глава 18. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЙ ВЫЧЕТ, ПРИНЦИП АРГУМЕНТА	392
18.1. Задания для аудиторной работы	392
18.2. Базовые индивидуальные задания	395
18.3. Задания для самостоятельной работы	398
18.4. Задания творческого характера	403
Глава 19. ОТОБРАЖЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ. ИНТЕГРАЛ КРИСТОФЛЕЯ – ШВАРЦА	405
19.1. Задания для аудиторной работы	405
19.2. Базовые индивидуальные задания	411
19.3. Задания для самостоятельной работы	417
19.4. Задания творческого характера	418
ОТВЕТЫ	420
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	442
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	443
СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	447