

Л. А. Альсевич С. Г. Красовский

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
ФУНКЦИИ
ИНТЕГРАЛЫ

ПРАКТИКУМ

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по математическим, физическим и экономическим
специальностям*

Минск



«Вышэйшая школа»

2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Основные обозначения..... | 3 |
| Предисловие..... | 5 |
| Глава 1. Метод математической индукции | 6 |
| Глава 2. Сочетания | 14 |
| Глава 3. Формула Ньютона | 18 |
| Глава 4. Предел последовательности | 25 |
| 4.1. Бесконечно малые последовательности | 26 |
| 4.2. Сходящиеся последовательности | 27 |
| 4.3. Бесконечно большие последовательности..... | 29 |
| 4.4. Эталонные пределы..... | 30 |
| 4.5. Нахождение предела по определению | 30 |
| 4.6. Примеры вычисления пределов с использованием эталонных пределов | 33 |
| 4.7. Подпоследовательности..... | 34 |
| 4.8. Эквивалентные последовательности | 35 |
| 4.9. Раскрытие неопределенностей | 36 |
| 4.10. Число e | 44 |
| 4.11. Критерий Коши сходимости последовательности..... | 46 |
| <i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i> | 50 |
| Глава 5. Функция. Предел функции | 60 |
| 5.1. Отображение множеств | 60 |
| 5.2. Числовые функции | 62 |
| 5.3. Обратная функция | 70 |
| 5.4. Композиция функций..... | 71 |
| 5.5. График функции | 71 |
| 5.6. Графики некоторых функций | 76 |
| 5.6.1. Линейная функция | 76 |
| 5.6.2. Квадратичная функция | 76 |
| 5.6.3. Степенная функция | 77 |

| | |
|--|------------|
| 5.6.4. Показательная функция..... | 78 |
| 5.6.5. Логарифмическая функция..... | 79 |
| 5.6.6. Тригонометрические функции..... | 79 |
| 5.6.7. Обратные тригонометрические функции..... | 82 |
| 5.6.8. Гиперболические функции..... | 86 |
| 5.6.9. Обратные гиперболические функции..... | 88 |
| 5.7. Элементарные функции..... | 92 |
| 5.8. Определение предела функции..... | 93 |
| 5.9. Основные свойства пределов функции..... | 97 |
| 5.10. Односторонние пределы..... | 101 |
| 5.11. Сравнение функций..... | 103 |
| 5.12. Замечательные пределы..... | 105 |
| 5.13. Эквивалентные функции..... | 108 |
| <i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i> | <i>119</i> |
| Глава 6. Непрерывность функций..... | 128 |
| 6.1. Непрерывные функции..... | 128 |
| 6.2. Классификация точек разрыва..... | 130 |
| 6.3. Локальные свойства непрерывных функций..... | 135 |
| <i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i> | <i>150</i> |
| Глава 7. Дифференцируемость функций..... | 166 |
| 7.1. Дифференцируемые функции..... | 166 |
| 7.2. Дифференциал функции..... | 167 |
| 7.3. Производная функции..... | 168 |
| 7.4. Правила дифференцирования..... | 170 |
| 7.4.1. Производные арифметических комбинаций..... | 170 |
| 7.4.2. Дифференцирование композиции..... | 172 |
| 7.4.3. Дифференцирование обратной функции..... | 174 |
| 7.4.4. Производные основных элементарных функций..... | 176 |
| 7.4.5. Бесконечные и односторонние производные..... | 180 |
| 7.5. Производные и дифференциалы высших порядков..... | 187 |
| 7.5.1. Производные высших порядков элементарных функций..... | 189 |
| 7.5.2. Дифференциалы высших порядков..... | 191 |

| | |
|---|------------|
| 7.5.3. Производные и дифференциалы высших порядков арифметических комбинаций..... | 192 |
| 7.6. Производные функций, заданных неявно..... | 197 |
| 7.7. Производные функций, заданных параметрически..... | 200 |
| 7.8. Приложения производной..... | 203 |
| 7.8.1. Геометрические приложения производной..... | 203 |
| 7.8.2. Правило Лопиталю вычисления пределов функций... .. | 210 |
| 7.9. Формула Тейлора..... | 220 |
| 7.9.1. Представление функций по формуле Тейлора..... | 220 |
| 7.9.2. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора — Пеано..... | 226 |
| <i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i> | <i>235</i> |
| Глава 8. Исследование функций с помощью производных..... | 278 |
| 8.1. Стационарные точки функции..... | 278 |
| 8.2. Монотонные функции..... | 281 |
| 8.3. Локальный экстремум функции..... | 283 |
| 8.4. Глобальный экстремум функции..... | 289 |
| 8.4.1. Глобальный экстремум функции на отрезке..... | 289 |
| 8.4.2. Глобальный экстремум функции на интервале..... | 290 |
| 8.5. Выпуклые функции. Точки перегиба..... | 292 |
| 8.6. Асимптоты функции..... | 295 |
| 8.7. Построение схемы графика функции..... | 299 |
| <i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i> | <i>311</i> |
| Глава 9. Неопределенный интеграл..... | 324 |
| 9.1. Первообразная. Неопределенный интеграл..... | 324 |
| 9.2. Основные методы интегрирования..... | 328 |
| 9.2.1. Введение множителя под знак дифференциала..... | 328 |
| 9.2.2. Внесение функции под знак дифференциала..... | 332 |
| 9.2.3. Выделение множителя из-под знака дифференциала... .. | 334 |
| 9.2.4. Интегрирование по частям..... | 336 |
| 9.3. Интегрирование рациональных функций..... | 345 |
| 9.3.1. Простейшие рациональные функции..... | 345 |

| | |
|--|-----|
| 9.3.2. Вычисление коэффициентов разложения рациональной функции на простейшие | 347 |
| 9.3.3. Различные подходы к отысканию коэффициентов в разложении рациональной функции на простейшие ... | 353 |
| 9.3.4. Вычисление неопределенных интегралов от рациональных функций | 360 |
| 9.3.5. Метод Остроградского для выделения рациональной части | 366 |
| 9.4. Интегрирование иррациональных функций | 371 |
| 9.4.1. Интегрирование выражений вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$... | 371 |
| 9.4.2. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$. Подстановки Эйлера | 375 |
| 9.4.3. Интегрирование биномиальных дифференциалов. Подстановки Чебышева | 384 |
| 9.5. Интегрирование рационально-тригонометрических функций | 387 |
| 9.5.1. Интегрирование выражений вида $R(\sin x, \cos x)$ | 387 |
| 9.5.2. Интегрирование выражений вида $\sin^m x \cos^n x$ | 393 |
| 9.5.3. Интегрирование выражений вида $\sin ax \cos bx$, $\sin ax \sin bx$, $\cos ax \cos bx$ | 395 |
| <i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий</i> | 396 |
| Глава 10. Определенный интеграл | 406 |
| 10.1. Интегральные суммы. Определение интеграла Римана | 406 |
| 10.2. Свойства определенных интегралов | 412 |
| 10.2.1. Линейность интеграла | 412 |
| 10.2.2. Аддитивность интеграла | 412 |
| 10.2.3. Монотонность интеграла (почленное интегрирование неравенств) | 413 |
| 10.2.4. Оценки интегралов | 414 |
| 10.2.5. Интегральная теорема о среднем | 415 |
| 10.3. Вычисление определенных интегралов | 417 |
| 10.3.1. Интеграл с переменным верхним пределом | 417 |
| 10.3.2. Формула Ньютона — Лейбница | 421 |
| 10.3.3. Замена переменной в определенном интеграле | 426 |

| | |
|--|------------|
| 10.3.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле..... | 429 |
| 10.3.5. Понятие несобственных интегралов..... | 430 |
| 10.4. Приложения определенного интеграла..... | 437 |
| 10.4.1. Площадь плоских фигур..... | 437 |
| 10.4.2. Длина дуги кривой..... | 442 |
| 10.4.3. Вычисление объемов тел..... | 446 |
| 10.4.4. Вычисление площадей поверхностей вращения..... | 452 |
| <i>Задачи для индивидуальных и контрольных заданий.....</i> | <i>455</i> |
| Рекомендуемая литература..... | 466 |