

Научная библиотека

БНТУ



А. И. Астровский, М. П. Дымков

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Утверждено

Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебника для студентов учреждений  
высшего образования по экономическим специальностям

В двух частях

Часть 1



Минск БГЭУ 2022

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ .....                                                  | 8         |
| ПРЕДИСЛОВИЕ .....                                                         | 13        |
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                            | 15        |
| <b>Глава 1. МНОЖЕСТВА, КООРДИНАТЫ, ЧИСЛА .....</b>                        | <b>21</b> |
| 1.1. Элементы классической теории множеств.....                           | 21        |
| 1.1.1. Множества. Операции над множествами ...                            | 21        |
| 1.1.2. Утверждения. Метод математической<br>индукции. Бином Ньютона ..... | 28        |
| 1.2. Метод координат .....                                                | 31        |
| 1.2.1. Взаимно однозначное соответствие.<br>Числовая ось .....            | 31        |
| 1.2.2. Декартовы системы координат на<br>плоскости .....                  | 33        |
| 1.2.3. Преобразование систем координат .....                              | 35        |
| 1.2.4. Полярная система координат на плоскости .                          | 37        |
| 1.3. Комплексные числа и операции над ними.....                           | 39        |
| <b>Глава 2. ВЕКТОРНОЕ И МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ .</b>                        | <b>44</b> |
| 2.1. Основные понятия векторной алгебры .....                             | 44        |
| 2.1.1. Определение и свойства векторов .....                              | 44        |
| 2.1.2. Линейные операции над векторами .....                              | 46        |
| 2.1.3. Скалярное произведение векторов .....                              | 51        |
| 2.2. Декартовы координаты в пространстве .....                            | 52        |
| 2.3. Векторные и евклидовы пространства .....                             | 58        |
| 2.3.1. Векторное пространство .....                                       | 59        |
| 2.3.2. Ранг и базис системы векторов .....                                | 61        |
| 2.3.3. Евклидово пространство .....                                       | 65        |
| 2.4. Матричное исчисление .....                                           | 68        |
| 2.4.1. Матрицы и операции над ними .....                                  | 69        |

|                 |                                                                 |            |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 2.4.2.          | Определитель матрицы .....                                      | 74         |
| 2.4.3.          | Обратная матрица и ранг матрицы .....                           | 79         |
| 2.5.            | Системы линейных уравнений .....                                | 83         |
| 2.5.1.          | Основные понятия систем уравнений .....                         | 83         |
| 2.5.2.          | Теорема Кронекера – Капелли .....                               | 86         |
| 2.5.3.          | Однородные системы линейных уравнений ..                        | 87         |
| 2.6.            | Методы решения систем линейных уравнений .....                  | 89         |
| 2.6.1.          | Метод обратной матрицы .....                                    | 89         |
| 2.6.2.          | Правило Крамера .....                                           | 90         |
| 2.6.3.          | Метод Гаусса .....                                              | 92         |
| 2.7.            | Собственные значения и собственные векторы ....                 | 98         |
| 2.8.            | Применение матриц в экономике .....                             | 101        |
| 2.8.1.          | Модель международной торговли .....                             | 101        |
| 2.8.2.          | Линейная модель Леонтьева .....                                 | 102        |
| <b>Глава 3.</b> | <b>АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ .....</b>                            | <b>107</b> |
| 3.1.            | Линии на плоскости .....                                        | 107        |
| 3.2.            | Прямая линия на плоскости .....                                 | 109        |
| 3.2.1.          | Общее уравнение прямой .....                                    | 109        |
| 3.2.2.          | Уравнение прямой с угловым<br>коэффициентом .....               | 110        |
| 3.2.3.          | Угол между двумя прямыми .....                                  | 111        |
| 3.2.4.          | Нормальное уравнение прямой .....                               | 113        |
| 3.3.            | Линии второго порядка на плоскости .....                        | 115        |
| 3.3.1.          | Эллипс .....                                                    | 116        |
| 3.3.2.          | Гипербола .....                                                 | 119        |
| 3.3.3.          | Парабола .....                                                  | 123        |
| 3.3.4.          | Исследование уравнений второго порядка ..                       | 125        |
| 3.4.            | Плоскости и прямые в пространстве .....                         | 128        |
| 3.4.1.          | Уравнение плоскости в пространстве .....                        | 128        |
| 3.4.2.          | Уравнение прямой в пространстве .....                           | 131        |
| 3.4.3.          | Взаимное расположение плоскостей .....                          | 133        |
| 3.4.4.          | Геометрические задачи в пространстве ....                       | 134        |
| 3.4.5.          | Геометрическая интерпретация систем<br>линейных уравнений ..... | 135        |
| 3.5.            | Системы линейных неравенств .....                               | 136        |

|                                                                                                |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>Глава 4. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА</b> . . .                                           | 139     |
| 4.1. Числовые последовательности . . . . .                                                     | 140     |
| 4.1.1. Числовые последовательности и операции<br>над ними. Предел последовательности . . . . . | 140     |
| 4.1.2. Основные свойства сходящихся<br>последовательностей . . . . .                           | 146     |
| 4.1.3. Монотонные последовательности . . . . .                                                 | 148     |
| 4.1.4. Число $\varepsilon$ и его применение в экономике . . . . .                              | 151     |
| 4.2. Вещественные функции одной переменной . . . . .                                           | 155     |
| 4.2.1. Общие сведения о функциях . . . . .                                                     | 155     |
| 4.2.2. Характеристики поведения функций . . . . .                                              | 162     |
| 4.3. Предел функции в точке . . . . .                                                          | 163     |
| 4.3.1. Определение и свойства пределов . . . . .                                               | 163     |
| 4.3.2. Односторонние пределы . . . . .                                                         | 167     |
| 4.3.3. Два замечательных предела . . . . .                                                     | 169     |
| 4.3.4. Сравнение бесконечно малых функций . . . . .                                            | 170     |
| 4.4. Непрерывные функции и их свойства . . . . .                                               | 172     |
| 4.4.1. Свойства непрерывных функций . . . . .                                                  | 172     |
| 4.4.2. Непрерывность элементарных функций . . . . .                                            | 175     |
| 4.5. Точки разрыва функций и их классификация . . . . .                                        | 176     |
| 4.6. Применение функций в экономике . . . . .                                                  | 178     |
| 4.6.1. Графики функций спроса и предложения . . . . .                                          | 180     |
| 4.6.2. Паутинная модель рынка . . . . .                                                        | 181     |
| <br><b>Глава 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ<br/>ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ</b> . . . . .         | <br>183 |
| 5.1. Производная и ее смысл . . . . .                                                          | 183     |
| 5.1.1. Определение производной . . . . .                                                       | 183     |
| 5.1.2. Геометрический, физический<br>и экономический смыслы производной . . . . .              | 186     |
| 5.1.3. Односторонние производные . . . . .                                                     | 189     |
| 5.1.4. Связь дифференцируемости<br>и непрерывности функций . . . . .                           | 190     |
| 5.2. Определение и смысл дифференциала . . . . .                                               | 190     |
| 5.3. Формулы дифференциального исчисления . . . . .                                            | 193     |
| 5.4. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши . . . . .                                            | 197     |
| 5.5. Производные высших порядков . . . . .                                                     | 201     |

|                  |                                                                |            |
|------------------|----------------------------------------------------------------|------------|
| 5.5.1.           | Определение производных высших порядков .....                  | 201        |
| 5.5.2.           | Формула Маклорена .....                                        | 202        |
| 5.6.             | Исследование функций с помощью производных ..                  | 203        |
| 5.6.1.           | Правило Лопиталья – Бернулли .....                             | 203        |
| 5.6.2.           | Интервалы монотонности функции .....                           | 206        |
| 5.6.3.           | Локальные экстремумы .....                                     | 208        |
| 5.6.4.           | Выпуклость, вогнутость и точки перегиба ..                     | 210        |
| 5.6.5.           | Асимптоты .....                                                | 212        |
| 5.6.6.           | Общий план исследования функции .....                          | 214        |
| 5.7.             | Применение производных в экономике .....                       | 215        |
| 5.7.1.           | Предельные показатели в микроэкономике ..                      | 215        |
| 5.7.2.           | Максимизация прибыли .....                                     | 218        |
| 5.7.3.           | Коэффициент эластичности .....                                 | 218        |
| <b>Глава 6.</b>  | <b>Практикум 1 «МНОЖЕСТВА, КООРДИНАТЫ, ЧИСЛА» .....</b>        | <b>222</b> |
| 6.1.             | Операции над множествами и метод математической индукции ..... | 222        |
| 6.2.             | Комплексные числа .....                                        | 228        |
| <b>Глава 7.</b>  | <b>Практикум 2 «ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ» ...</b>                  | <b>234</b> |
| 7.1.             | Операции над векторами .....                                   | 234        |
| <b>Глава 8.</b>  | <b>Практикум 3 «МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ» ...</b>                  | <b>241</b> |
| 8.1.             | Матрицы и операции над ними .....                              | 241        |
| 8.2.             | Системы линейных уравнений .....                               | 253        |
| 8.3.             | Однородные системы и собственные числа .....                   | 267        |
| 8.4.             | Применение матриц в экономике .....                            | 272        |
| <b>Глава 9.</b>  | <b>Практикум 4 «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ» .....</b>             | <b>287</b> |
| 9.1.             | Прямая линия на плоскости .....                                | 287        |
| 9.2.             | Прямые и плоскости в пространстве .....                        | 297        |
| <b>Глава 10.</b> | <b>Практикум 5 «ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА» .....</b>      | <b>307</b> |
| 10.1.            | Числовые последовательности .....                              | 307        |

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| 10.2. Общие сведения о функциях одной переменной .. | 315 |
| 10.3. Предел функции и непрерывность .....          | 323 |

**Глава 11. Практикум 6 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ  
ИСЧИСЛЕНИЕ» .....** 335

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.1. Производная функции одной переменной .....                                                         | 335 |
| 11.2. Дифференциал функции. Производные<br>функции высших порядков. Раскрытие<br>неопределенностей ..... | 341 |
| 11.3. Исследование функций одной переменной .....                                                        | 349 |

**Глава 12. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ .....** 362

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| 12.1. Описание тестов .....          | 362 |
| 12.2. Примеры тестовых заданий ..... | 364 |
| 12.3. Примеры вариантов тестов ..... | 381 |

**Глава 13. ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ .....** 385

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| ВОПРОСЫ К СЕССИИ .....         | 405 |
| САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА .....   | 409 |
| РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ..... | 411 |
| ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ .....     | 413 |